§§1　データの整理

§1　1 変量の場合

1. 度数分布

2. モーメント

定義　n 個の測定値 $x_1,\ x_2, \cdots x_n$ の平均値 $\bar{x}$ とは、

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$$

をいう。

定義　n 個の測定値 $x_1,\ x_2, \cdots x_n$ の分散 $s^2 = s^2(x) = s(x,x) = s_{xx}$ とは、

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2$$

をいう。

定義　n 個の測定値 $x_1,\ x_2, \cdots x_n$ の標準偏差 $s = s(x)$ とは、

$$s = \sqrt{s^2}$$

をいう。

問　次のデータの平均値、分散、標準偏差を求めよ。

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
	3	2	5	4	4	8	1	7	9	6

答　$\bar{x} = 4.9 \quad s^2 = 60.9 \quad s = 7.8038$

命題　$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - \bar{x}^2$$

証明　$s^2=\dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-\bar{x})^2=\dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu^2-2\bar{x}x_\nu+\bar{x}^2)$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2-2\bar{x}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu+\frac{1}{n}n\bar{x}^2=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2-2\bar{x}^2+\bar{x}^2=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2-\bar{x}^2$$

証明終

§２　２変量の場合

定義　二つの変量 $X,\ Y$ の n 組の測定値

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \cdots\ (x_n,y_n),$$

が与えられているとき、

その共分散 S_{xy} とは

$$S_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-\bar{x})(y_\nu-\bar{y})$$

をいう。

命題　　$S_{xy}=\dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu y_\nu-\bar{x}\bar{y}$

証明　$S_{xy}=\dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu y_\nu-\bar{x}y_\nu-\bar{y}x_\nu+\bar{x}\bar{y})=\dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu y_\nu-\bar{x}\bar{y}-\bar{y}\bar{x}+\bar{x}\bar{y}$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu y_\nu-\bar{x}\bar{y}$$

証明終

定義　二つの変量 $X,\ Y$ の n 組の測定値

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \cdots\ (x_n,y_n),$$

が与えられているとき、($S_{xx}\neq 0$　のとき)

その相関係数 $r=r_{xy}$ とは

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

をいう。

2. 回帰

命題　二つの変量 X, Y の n 組の測定値

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \cdots\ (x_n, y_n),$$

の相関図に、直線 $y = a + bx$ を次のようにひく。

点 $P_\nu(x_\nu,\ y_\nu)$ を通って y 軸に平行線を引き、直線 $y = a + bx$ と交わる点を $Q_\nu(x_{nu},\ a + bx_{nu})$ とする。この時、

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu Q_\nu^2 = \sum_{n=1}^{n} (y_\nu - a - bx_\nu)^2$$ を最小にする a と b は次で与えられる。

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

$$a = \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_{xx}}\bar{x} = \bar{y} - b\bar{x}$$

証明　$S = \sum_\nu (y_\nu - a - bx_\nu)^2$

$$= \sum_\nu (y_\nu - \bar{y} + \bar{y} - a - bx_\nu + b\bar{x} - b\bar{x})^2$$

$$= \sum_\nu (\{(y_\nu - \bar{y}) - b(x_\nu - \bar{x})\} + \bar{y} - a - b\bar{x})^2$$

$$= \sum_\nu \{(y_\nu - \bar{y}) - b(x_\nu - \bar{x})\}^2 + 2(\bar{y} - a - b\bar{x}) \sum_\nu \{(y_\nu - \bar{y}) - b(x_\nu - \bar{x})\}$$

$$+\sum_{\nu}(\bar{y}-a-b\bar{x})^2$$

この第２項は０になるから

$$\begin{aligned}
&=\sum_{\nu}(y_\nu-\bar{y})^2-2b\sum_{\nu}(x_\nu-\bar{x})(y_\nu-\bar{y})+b^2\sum_{\nu}(x_\nu-\bar{x})^2+n(\bar{y}-a-b\bar{x})^2\\
&=nS_{yy}-2nbS_{xy}+nb^2S_{xx}+n(\bar{y}-a-b\bar{x})^2\\
&=n\left\{(\bar{y}-a-b\bar{x})^2+S_{xx}\left(b^2-\frac{2S_{xy}}{S_{xx}}b\right)+S_{yy}\right\}\\
&=n\left\{(\bar{y}-a-b\bar{x})^2+S_{xx}\left(b-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right)^2+\left(S_{yy}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

故に、$b=\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$ かつ、$\bar{y}-a-b\bar{x}=0$ のとき、S の最小値 $n\left(S_{yy}-\dfrac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right)$ をとる。

証明終

定義　上により出来た直線 $y=a+bx$ を、「Y の X への回帰直線」と言い、

b を「Y の X への回帰係数」と言う。

問　次のデータについて、「Y の X への回帰直線」を求めよ。

また、「X と Y との相関係数 r 」を求めよ。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1.1	2.1	2.9	3.9	4.9	6.2	2.2	3.1	4.1	7.0
Y	3.2	4.9	7.2	8.7	11.2	12.8	5.3	6.9	9.2	14.8

答　「Y の X への回帰直線」は、$y=1.0600638468+1.9626496409x$,

$r=0.99665093276$

問　前問と同じデータにより、「X の Y への回帰直線」を求めよ。

（前問の答 $y = 1.060 + 1.963x$ を、x を縦軸に、y を横軸にすれば、

$x = -0.54 + 0.51y$ となるが、これがこの問の答になるだろうか。）

答　$x = -0.51143 + 0.5061y$　となる。

即ち、前問の答を、x を縦軸に、y を横軸にしたものとは異なる。

定義　n 個の物のおのおのについて、３種の測定値 $X_1,\ X_2,\ X_3$ が与えられている。即ち、

$(x_{11},\ x_{21},\ x_{31})$

$(x_{12},\ x_{22},\ x_{32})$

$(x_{13},\ x_{23},\ x_{33})$

$\cdots$

$(x_{1n},\ x_{2n},\ x_{3n})$

（ここで、何をやっているのか、あまりに抽象的すぎては分らないので、次のことを頭において置けばよい。即ち、n 個の物 を人間、X_1 を血圧、X_2 を身長、X_3 を体重、と考え、身長と体重によって、血圧を推定出来るか、という問題を考えていると。）

$\bar{x}_1$ を $x_{1\nu}$ の平均値、即ち $\bar{x}_1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} x_{1\nu}$

$\bar{x}_2$ を $x_{2\nu}$ の平均値、即ち $\bar{x}_2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} x_{2\nu}$

$\bar{x}_3$ を $x_{3\nu}$ の平均値、即ち $\bar{x}_3 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} x_{3\nu}$

s_{11} を $x_{1\nu}$ の分散、即ち $s_{11} = \dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_{1\nu} - \bar{x}_1)^2$

s_{22} を $x_{2\nu}$ の分散、即ち $s_{22} = \dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_{2\nu} - \bar{x}_2)^2$

s_{33} を $x_{3\nu}$ の分散、即ち $s_{33} = \dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_{3\nu} - \bar{x}_3)^2$

$s_{12} = s_{21}$ を $x_{1\nu}$ と $x_{2\nu}$ の共分散、

即ち $s_{12} = s_{21} = \dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_{1\nu} - \bar{x}_1)(x_{2\nu} - \bar{x}_2)$

$s_{13} = s_{31}$ を $x_{1\nu}$ と $x_{3\nu}$ の共分散、

即ち $s_{13} = s_{31} = \dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_{1\nu} - \bar{x}_1)(x_{3\nu} - \bar{x}_3)$

$s_{23} = s_{32}$ を $x_{2\nu}$ と $x_{3\nu}$ の共分散、

即ち $s_{23} = s_{32} = \dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_{2\nu} - \bar{x}_2)(x_{3\nu} - \bar{x}_3)$

と定義し、また

X_i と X_j の相関係数 r_{ij} を、

$r_{ij} = \dfrac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}}$

と定義する。また、

分散行列 A を次のように定義する

$$A = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

また、A の s_{ij} 余因子を A_{ij} と書く。

(即ち、A'_{ij} を i 行 j 列を取除いた小行列式とした時、$A_{ij} = (-1)^{i+j}A'_{ij}$)

余因子の定義があやふやな人のために、以下、具体的に書いておく

$$A_{11}=\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix},\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} s_{21} & s_{23} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix},\quad A_{13}=\begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix},\quad A_{22}=\begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix},\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{22} & s_{23} \end{vmatrix},\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{21} & s_{23} \end{vmatrix},\quad A_{33}=\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}$$

命題　$A_{11}>0$ のとき

　n 組の測定値 $(x_{11},x_{21},x_{31}),\quad\cdots\quad(x_{1n},x_{2n},x_{3n})$ を三次元のグラフに次のようにプロットする。

　X_1 が上向きの軸になるように、つまり普通のデカルト座標では Z 軸にあたる方向の軸になるように取り、

(従って、上に「測定値 $(x_{11},x_{21},x_{31}),\quad\cdots\quad(x_{1n},x_{2n},x_{3n})$ 」と

書いたが、実は、測定値 $(x_{21},x_{31},x_{11}),\quad\cdots\quad(x_{2n},x_{3n},x_{1n})$ と取る。)

点 $P_\nu(x_{2\nu},\ x_{3\nu},\ x_{1\nu})$ を通って X_1 軸に平行線を引き、その直線が

平面 $X_1=a+b_2X_2+b_3X_3$ と交わる点を

$Q_\nu(x_{2\nu},\ x_{3\nu},\ a+b_2x_{2\nu}+b_3x_{3\nu})$ とする。

このとき、次の S を次で定義し、

$$S=\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu Q_\nu^2=\sum_{\nu=1}^{n}(x_{1\nu}-a-b_2x_{2\nu}-b_3x_{3\nu})^2$$

この S を最小にする $a,\ b_2,\ b_3$ を求めると、

(7)　$b_2=-\dfrac{A_{12}}{A_{11}},\ \ b_3=-\dfrac{A_{13}}{A_{11}}$

(8)　$a=\bar{x}_1-b_2\bar{x}_2-b_3\bar{x}_3$

証明　まづ (8) を示す。

a^2 の係数は正であるから、$\dfrac{\partial S}{\partial a} = 0$ なるところが最小。計算する。

$\dfrac{\partial S}{\partial a} = 0$ とおく。

$$2(-1)\sum_{\nu=1}^{n}(x_{1\nu} - a - b_2 x_{2\nu} - b_3 x_{3\nu}) = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{1\nu} - na - b_2 \sum_{\nu=1}^{n} x_{2\nu} - b_3 \sum_{\nu=1}^{n} x_{3\nu} = 0$$

両辺を n で割って、

$$\bar{x}_1 - a - b_2\bar{x}_2 - b_3\bar{x}_3 = 0$$

$$\therefore \quad a = \bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - b_3\bar{x}_3$$

次に (7) を示す。

(8) は示されたから、この a を S に代入する

$$S = \sum_{\nu=1}^{n}(x_{1\nu} - (\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - b_3\bar{x}_3) - b_2 x_{2\nu} - b_3 x_{3\nu})^2$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\{(x_{1\nu} - \bar{x}_1) - b_2(x_{2\nu} - \bar{x}_2) - b_3(x_{3\nu} - \bar{x}_3)\}^2$$

$$= n\{s_{11} + b^2 s_{22} + b^2 s_{33} - 2b_2 s_{12} - 2b_3 s_{13} + 2b_2 b_3 s_{23}\}$$

b_2 の係数は正であるから、$\dfrac{\partial S}{\partial b_2} = 0$ なるところが最小。計算する。

$$\frac{\partial S}{\partial b_2} = 2nb_2 s_{22} - 2ns_{12} + 2nb_3 s_{23} = 0$$

b_3 の係数は正であるから、$\dfrac{\partial S}{\partial b_3} = 0$ なるところが最小。計算する。

$$\frac{\partial S}{\partial b_3} = 2nb_3 s_{33} - 2ns_{13} + 2nb_2 s_{23} = 0$$

$$\therefore \quad s_{22}b_2 + s_{23}b_3 = s_{12}$$

$$s_{23}b_2 + s_{33}b_3 = s_{13}$$

クラーメルの公式により

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} s_{12} & s_{23} \\ s_{13} & s_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{vmatrix}}$$

$s_{12} = s_{21}$，$s_{13} = s_{31}$，$s_{23} = s_{32}$ であるから、

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} s_{21} & s_{23} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}}$$

この分子は、分散行列式の第 1 行と第 2 列を取除いた行列式である。

余因子行列式の定義からこれは $-A_{12}$。

また分母は、分散行列式の第 1 行と第 1 列を取除いた行列式である。

余因子行列式の定義からこれは A_{11}。従って b_2 は、

$$b_2 = -\frac{A_{12}}{A_{11}}$$

次に b_3 も同様にクラーメルを使って、

$$b_3 = \frac{\begin{vmatrix} s_{22} & s_{12} \\ s_{23} & s_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}}$$

この分子は、分散行列式の第 1 行と第 3 列を取除いた行列式である。

余因子行列式の定義からこれは $-A_{13}$ 。従って b_3 は、

$$b_3 = -\frac{A_{13}}{A_{11}}$$

定義　上の命題によって出来た b_2 を、「X_1 の X_2 への偏回帰係数」といい、

b_3 を、「X_1 の X_3 への偏回帰係数」という。

また、上の命題によって出来た平面、

$X_1 = a + b_2 X_2 + b_3 X_3$

(或は、$a = \bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - b_3\bar{x}_3$ であるから、

$X_1 = \bar{x}_1 + b_2(X_2 - \bar{x}_2) + b_3(X_3 - \bar{x}_3)$ とも書ける。)

を、「X_1 の (X_2, X_3) への重回帰式」という。

或は、X_1 がデータと混同しないために、これを $x'_{1\cdot 23}$ と書き、

また、X_2 を x_2, X_3 を x_3 と書き、重回帰式を次のようにも書く。

$x'_{1\cdot 23} = \bar{x}_1 + b_2(x_2 - \bar{x}_2) + b_3(x_3 - \bar{x}_3)$

定義「X_1 と (X_2, X_3) の重相関係数 $r_{1(23)}$」とは、(X_2, X_3) を、データの数だけ重回帰式に入れ、$x'_{1\cdot 23}$ を作り、これと X_1 のデータを、二変数のデータと考えて、その相関係数を作る。この相関係数を言う。

問 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ の 10 個のデータが下記のように与えられいる。

$X_1,\ X_2,\ X_3$ の平均値と分散行列を求め、

「X_1 の (X_2, X_3) への重回帰式」を求めよ。

また、重相関係数 $r_{1(23)}$ を求めよ。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_1	5	3	6	4	8	1	7	2	7	5
X_2	3.2	4.9	7.2	8.7	11.2	12.8	5.3	6.9	9.2	14.8
X_3	1.1	2.1	2.9	3.9	4.9	6.2	2.2	3.1	4.1	7

答 $\bar{x_1} = 4.8,\ \bar{x_2} = 8.42,\ \bar{x_3} = 3.75$

分散行列 A は

$$A=\begin{pmatrix} 4.76 & -0.376 & -0.45 \\ -0.376 & 12.1476 & 6.148 \\ -0.45 & 6.148 & 3.1325 \end{pmatrix}$$

「X_1 の (X_2, X_3) への重回帰式」は、

$X_1 = -1.2802293547 + 6.2439035893X_2 - 12.398250365X_3$

次に、重相関係数 $r_{1(23)}$ は、まず $x'_{1\cdot 23}$ を作り、X_1 との相関係数を求める。

	X_1	$x'_{1\cdot 23}$
1	5	5.06218673
2	3	3.2785724672
3	6	7.7209504309
4	4	4.6885554503
5	8	7.900064059
6	1	1.772584328
7	7	4.5363088665
8	2	3.3681292812
9	7	5.3308571721
10	5	4.3417912149

これから、重相関係数 $r_{1(23)}$ は、

$r_{1(23)} = 0.82394634963$　　　　（解おわり）

命題　重相関係数 $r_{1(23)}$ は、次の公式を使えば求まる。

$$r_{1(23)} = \sqrt{1 - \frac{A}{s_{11}A_{11}}}$$

（注意、A とは分散行列の行列式のこと。）

問　この公式を使って、$r_{1(23)}$ を求めよ。

解　$A = 0.38893016$

$A/(s_{11}A_{11}) = 0.32111241293$

$\therefore r_{1(23)} = 0.82394634963$　　　　　（解おわり）

問　上の命題を証明せよ。

解　x_1 と $x'_{1\cdot 23}$ の相関係数を求めればよい。

まず、$x'_{1\cdot 23} = \bar{x}_1 + b_2(x_2 - \bar{x}_2) + b_3(x_3 - \bar{x}_3)$

の平均値を求める。

$$\bar{x}'_{1\cdot 23} = \frac{1}{n}\sum\left[\bar{x}_1 + b_2(x_2 - \bar{x}_2) + b_3(x_3 - \bar{x}_3)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum \bar{x} + \frac{b_2}{n}\sum(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{b_3}{n}\sum(x_3 - \bar{x}_3) = \bar{x}$$

次に、x_1 と $x'_{1\cdot 23}$ の共分散、$s_{x_1 x'_{1\cdot 23}}$ を求める。

$$s_{x_1 x'_{1\cdot 23}} = \frac{1}{n}\sum(x_1 - \bar{x}_1)(x'_{1\cdot 23} - \bar{x}_1) = \frac{1}{n}\sum(x_1 - \bar{x}_1)\left(b_2(x_2 - \bar{x}_2) + b_3(x_3 - \bar{x}_3)\right)$$

$$= \frac{b_2}{n}\sum(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{b_3}{n}\sum(x_1 - \bar{x}_1)(x_3 - \bar{x}_3)$$

$$= b_2 s_{12} + b_3 s_{13}$$

次に、$x'_{1\cdot 23}$ の分散、$s_{x'_{1\cdot 23} x'_{1\cdot 23}}$ を求める。

$$s_{x'_{1\cdot 23} x'_{1\cdot 23}} = \frac{1}{n}\sum(x'_{1\cdot 23} - \bar{x}_1)(x'_{1\cdot 23} - \bar{x}_1)$$

$$= \frac{1}{n}\sum(b_2(x_2 - \bar{x}_2) + b_3(x_3 - \bar{x}_3))(b_2(x_2 - \bar{x}_2) + b_3(x_3 - \bar{x}_3))$$

片方の (　) の中に、$-(x_1 - \bar{x}_1) + (x_1 - \bar{x}_1)$ を入れて、

$$= \frac{1}{n}\sum(b_2(x_2-\bar{x}_2)+b_3(x_3-\bar{x}_3)-(x_1-\bar{x}_1)+(x_1-\bar{x}_1))$$
$$(b_2(x_2-\bar{x}_2)+b_3(x_3-\bar{x}_3))$$
$$= \frac{1}{n}\sum(b_2(x_2-\bar{x}_2)+b_3(x_3-\bar{x}_3)-(x_1-\bar{x}_1))(b_2(x_2-\bar{x}_2)+b_3(x_3-\bar{x}_3))$$
$$+ \frac{1}{n}\sum(x_1-\bar{x}_1)(b_2(x_2-\bar{x}_2)+b_3(x_3-\bar{x}_3))$$
$$= \frac{1}{n}\sum(b_2(x_2-\bar{x}_2)+b_3(x_3-\bar{x}_3)-(x_1-\bar{x}_1))(b_2(x_2-\bar{x}_2))$$
$$+ \frac{1}{n}\sum(b_2(x_2-\bar{x}_2)+b_3(x_3-\bar{x}_3)-(x_1-\bar{x}_1))(b_3(x_3-\bar{x}_3))$$
$$+ \frac{1}{n}\sum(x_1-\bar{x}_1)(b_2(x_2-\bar{x}_2)+b_3(x_3-\bar{x}_3))$$
$$= b_2(b_2 s_{22}+b_3 s_{23}-s_{21})$$
$$+ b_3(b_2 s_{32}+b_3 s_{33}-s_{31})$$
$$+ b_2 s_{12}+b_3 s_{13}$$

8 頁の下から 4 行目の式から、上の式の第 1 項と第 2 項は 0 。従って、

$$s_{x'_{1\cdot 23}x'_{1\cdot 23}} = b_2 s_{12}+b_3 s_{13}$$

$$\therefore\quad r_{1(23)} = \frac{s_{x_1 x'_{1\cdot 23}}}{\sqrt{s_{11}s_{x'_{1\cdot 23}x'_{1\cdot 23}}}} = \frac{b_2 s_{12}+b_3 s_{13}}{\sqrt{s_{11}(b_2 s_{12}+b_3 s_{13})}} = \sqrt{\frac{b_2 s_{12}+b_3 s_{13}}{s_{11}}}$$

ここで、根号の中の分子を別個に計算してみると、

$$b_2 s_{12}+b_3 s_{13} = -\frac{s_{12}A_{12}}{A_{11}} - \frac{s_{13}A_{13}}{A_{11}}$$
$$= \frac{s_{11}A_{11}}{A_{11}} - \frac{s_{11}A_{11}}{A_{11}} - \frac{s_{12}A_{12}}{A_{11}} - \frac{s_{13}A_{13}}{A_{11}}$$
$$= s_{11} - \frac{s_{11}A_{11}+s_{12}A_{12}+s_{13}A_{13}}{A_{11}}$$
$$= s_{11} - \frac{A}{A_{11}}$$

$$\therefore\quad r_{1(23)} = \sqrt{1-\frac{A}{s_{11}A_{11}}}$$ 証明終