誕生会のプレゼント

問　子供５人で誕生会をする。銘々プレゼントを買って来て、それを５人に無作為に配る。各々が誰も自分の買って来たプレゼントを受取らない確率を求めよ。

(解)　それぞれの子供の名前を、

$$1, 2, 3, 4, 5$$

とし、プレゼントの名前も同じく、

$$1, 2, 3, 4, 5$$

とする。

例えば、

1	2	3	4	5
5	1	3	2	4

となれば、3 が自分のプレゼントを受取り、他の者はそれぞれ他人からのプレゼントを受取ったことになる。

1	2	3	4	5
5	2	1	4	3

なら、2 と 4 が自分のプレゼントを受取り、他の者はそれぞれ他人からのプレゼントを受取ったことになる。

　さて、全ての場合の数は $5! = 120$ 。あとは「自分の買って来たプレゼントを受取らない場合の数を数えればよい。

まづ、「5 が誰のプレゼントを受取るか」で場合分けする。

$case$ 1) 5 が 1 のプレゼントを受取る。

$case$ 2) 5 が 2 のプレゼントを受取る。

$case$ 3) 5 が 3 のプレゼントを受取る。

$case$ 4) 5 が 4 のプレゼントを受取る。

(「5 が 5 のプレゼントを受取る、は駄目。)

$case$ 1) では、$1, 2, 3, 4$ が、$2, 3, 4, 5$ のプレゼントを受取ることになる。

これは 5 のプレゼントを誰が受取るか、で分類する。

$case\ 1-1)$ 1 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4
5			

従って、$2, 3, 4$ が $2, 3, 4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼン

トを受取らない場合。

2	3	4
3	4	2
4	2	3

の 2 通り。

$case\ 1-2)$ 2 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4
	5		

従って、$1,3,4$ が $2,3,4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	3	4
2	4	3
3	4	1
4	1	3

の 3 通り。

$case\ 1-3)$ 3 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4
		5	

従って、$1,2,4$ が $2,3,4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	2	4
2	4	3
3	4	2
4	3	2

の 3 通り。

$case\ 1-4)$ 4 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4
			5

従って、$1,2,3$ が $2,3,4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	2	3
2	3	4
3	4	2
4	3	2

の 3 通り。

即ち、$case$ 1) の場合の数は、

$$2 + 3 \times 3 = 11$$

$case$ 2) では、$1, 2, 3, 4$ が、$1, 3, 4, 5$ のプレゼントを受取ることになる。

これも 5 のプレゼントを誰が受取るか、で分類する。

$case$ $2-1)$ 1 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
5				2

従って、$2, 3, 4$ が $1, 3, 4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

2	3	4
1	4	3
3	4	1
4	1	3

の 3 通り。

$case$ $2-2)$ 2 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
	5			2

従って、$1, 3, 4$ が $1, 3, 4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	3	4
3	4	1
4	1	3

の 2 通り。

$case$ $2-3)$ 3 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
		5		2

従って、$1, 2, 4$ が $2, 3, 4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼン

トを受取らない場合。

1	2	4
3	4	1
4	1	3
4	3	1

の 3 通り。

$case\ 1-4)$ 4 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
			5	2

従って、$1,2,3$ が $1,3,4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	2	3
3	1	4
3	4	1
4	3	1

の 3 通り。

即ち、$case\ 2)$ の場合の数は、

$$2+3\times 3=11$$

$case\ 3)$ では、$1,2,3,4$ が、$1,2,4,5$ のプレゼントを受取ることになる。

これも 5 のプレゼントを誰が受取るか、で分類する。

$case\ 3-1)$ 1 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
5				3

従って、$2,3,4$ が $1,2,4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

2	3	4
1	4	2
3	4	2
4	2	3

の 3 通り。

$case\ 3-2)$ 2 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
	5			3

従って、$1, 3, 4$ が $1, 2, 4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	3	4
2	4	1
4	2	1
4	1	2

の 2 通り。

$case$ $3-3)$ 3 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
		5		3

従って、$1, 2, 4$ が $1, 2, 4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	2	4
2	4	1
4	1	2

の 3 通り。

$case$ $3-4)$ 4 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
			5	3

従って、$1, 2, 3$ が $1, 2, 4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	2	3
2	1	4
2	4	1
4	1	2

の 3 通り。

即ち、$case$ 3) の場合の数は、

$$2 + 3 \times 3 = 11$$

$case$ 4) では、$1, 2, 3, 4$ が、$1, 2, 3, 5$ のプレゼントを受取ることになる。
これも 5 のプレゼントを誰が受取るか、で分類する。

$case\ 4-1)$ 1 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
5				4

従って、$2,3,4$ が $1,2,3$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

2	3	4
1	2	3
3	1	2
3	2	1

の 3 通り。

$case\ 4-2)$ 2 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
	5			4

従って、$1,3,4$ が $1,2,3$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	3	4
2	1	3
3	1	2
3	2	1

の 3 通り。

$case\ 4-3)$ 3 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
		5		4

従って、$1,2,4$ が $1,2,3$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	2	4
2	1	3
2	3	1
3	1	2

の 3 通り。

$case\ 4-4)$ 4 が 5 のプレゼントを受取る。

1	2	3	4	5
			5	4

従って、$1,2,3$ が $1,2,3$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合。

1	2	3
2	3	1
3	1	2

の 2 通り。
即ち、$case$ 4) の場合の数は、

$$2+3\times 3=11$$

従って、$case$ 1), $case$ 2), $case$ 3), $case$ 4) の場合の数を加えて、

$$11\times 4=44$$

即ち、求める確率は $\dfrac{44}{120}$ ...(答)

上の解法から次のように考えると、$a,\ b$ に関する漸化式が求まる。
$n=5$ の場合では、上の 11 という数を発見出来れば、あとは、$11\times 4=44$ で、すぐ答が出る。

11 は、$2+3\times 3$ で、この 2 の方は、$n=3$ の時の場合の数である。そこで、n の時の場合の数を a_n とする。
(即ち、例えば a_3 は、「3 人で誕生会をやる。3 人で持ち寄ったプレゼントを配るのに、誰も自分の持って来たプレゼントを受取らない場合の数」である。)
(前例題によれば、$a_3=2,\ a_5=44$ である。)
$2+3\times 3$ の 3 の方は、(一方の 3 は $5-2$ で簡単) 例えば $case1-2)$ においては、
「$1,3,4$ が $2,3,4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰も自分のプレゼントを受取らない場合の数」で、
即ち、「$\times,3,4$ (の 3 人) が、$\triangle,3,4$ のプレゼントを受取り、かつ、誰もが自分のプレゼントを受取らない場合の数」で、

$\times$	3	4
$\triangle$	4	3
3	4	$\triangle$
4	$\triangle$	3

の 3 通り。　つまり、$b_3 = 3$

これでは規則が見つかりにくいが、b_4 を作ってみると、分る。

×	2	3	4
△	4	2	3
△	3	4	2
2	△	4	3
2	3	4	△
2	4	△	3
3	△	4	2
3	4	△	2
3	4	2	△
4	△	2	3
4	3	△	2
4	3	2	△

つまり、×が△のプレゼントを受取る場合は、$2, 3, 4$ が $2, 3, 4$ のプレゼントを受取る場合の数となり、これは a_3

×が 2 のプレゼントを受取る場合は、$2, 3, 4$ が $\triangle, 3, 4$ のプレゼントを受取る場合の数となり、これは b_3

×が 3 のプレゼントを受取る場合は、$2, 3, 4$ が $\triangle, 2, 4$ のプレゼントを受取る場合の数となり、これは b_3

×が 4 のプレゼントを受取る場合は、$2, 3, 4$ が $\triangle, 2, 3$ のプレゼントを受取る場合の数となり、これは b_3

すると、

$$b_4 = a_3 + 3b_3 = 3 + 3 \times 3 = 11$$

そして $a_5 = 4b_4 = 4 \times 11 = 44$

これで漸化式が出来る。即ち、

$$b_n = a_{n-1} + (n-1)b_{n-1}$$
$$a_n = (n-1)b_{n-1}$$

これで計算してみる。

$a_2 = 1, \quad b_2 = 1$

$a_3 = (n-1)b_2 = 2 \times 1 = 2, \quad b_3 = a_2 + 2b_2 = 1 + 2 \times 1 = 3$
$a_4 = (n-1)b_3 = 3 \times 3 = 9, \quad b_4 = a_3 + 3b_3 = 1 + 3 \times 3 = 11$
$a_5 = (n-1)b_4 = 4 \times 11 = 44, \quad b_5 = a_4 + 4b_4 = 9 + 4 \times 11 = 53$
$a_6 = (n-1)b_5 = 5 \times 53 = 265, \quad b_6 = a_5 + 5b_5 = 44 + 5 \times 53 = 309$
$a_7 = (n-1)b_6 = 6 \times 309 = 1854, \quad b_7 = a_6 + 6b_6 = 44 + 6 \times 309 = 2119$
$a_8 = (n-1)b_7 = 7 \times 2119 = 14833$

$a_n = (n-1)b_{n-1} = (n-1)\left[a_{n-2} + (n-2)b_{n-2}\right]$
$= (n-1)\left[a_{n-2} + a_{n-1}\right] = na_{n-1} - a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$

$\therefore$
$a_n - na_{n-1} = (-1)[a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}]$
$= (-1)[(-1)\{a_{n-2} - (n-2)a_{n-3}\}]$
$= (-1)^2[a_{n-2} - (n-2)a_{n-3}]$
$= \cdots$
$= (-1)^{n-2}[a_2 - 2a_1]$
$= (-1)^n$

$\therefore$
$a_n = na_{n-1} + (-1)^n$
$= n\left[(n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1}\right] + (-1)^n$
$= n(n-1)[(n-2)a_{n-3} + (-1)^{n-2}] + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$
$= \cdots$
$= (-1)^n n! + (-1)^{n-1} \ {}_nC_{n-1} \ (n-1)! + (-1)^{n-2} \ {}_nC_{n-2} \ (n-2)! + \cdots +$
$(-1)^{n-k} \ {}_nC_{n-k} \ (n-k)! + \cdots + (-1)^{n-1}n + (-1)^n$
$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{k!}(-1)^k + \cdots + \frac{1}{n!}(-1)^n\right]$
$\therefore$
$\frac{a_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{k!}(-1)^k + \cdots + \frac{1}{n!}(-1)^n$