誕生会のプレゼント

問　子供５人で誕生会をする。銘々プレゼントを買って来て、それを５人に無作為に配る。各々が誰も自分の買って来たプレゼントを受取らない確率を求めよ。

(別解)

1)　$n=2$ のとき

1	2
2	1

の一つだけ。ここで記号を作る。

「n 人のうち m 人が自分のプレゼントを受取り、$(n-m)$ 人が他人のプレゼントを受取る場合の数を ${}_na_m$ と書くことにする。

従って、上の結果から、

$${}_2a_2=1\ ,\ {}_2a_1=0\ ,\ {}_2a_0=1$$

となる。

2)　$n=3$ のとき

${}_3a_3=1$

${}_3a_2=0$

は自明。

${}_3a_1$ は、次の３通り。

$case$ 1) 1 が 1 のプレゼントを受取り、他の二人は他人のプレゼントを受取る。

　　この場合の数は、${}_2a_0=1$

$case$ 2) 2 が 2 のプレゼントを受取り、他の二人は他人のプレゼントを受取る。

　　この場合の数は、${}_2a_0=1$

$case$ 3) 3 が 3 のプレゼントを受取り、他の二人は他人のプレゼントを受取る。

　　この場合の数は、${}_2a_0=1$

即ち ${}_3a_1=3{}_2a_0=3$

故に、

$${}_3a_0=3!-({}_3a_3+{}_3a_2+{}_3a_1)=6-4=2$$

3) $n=4$ のとき

$_4a_4=1$

$_4a_3=0$

は自明。

$_4a_2$ は、次の 6 通り。

$case$ 1) 1,2 が 夫々 1,2 のプレゼントを受取り、他の二人は他人のプレゼントを受取る。

この場合の数は、$_2a_0=1$

$case$ 2) 1,3 が 夫々 1,3 のプレゼントを受取り、他の二人は他人のプレゼントを受取る。

この場合の数は、$_2a_0=1$

$case$ 3) 1,4 が 夫々 1,4 のプレゼントを受取り、他の二人は他人のプレゼントを受取る。

この場合の数は、$_2a_0=1$

$case$ 4) 2,3 が 夫々 2,3 のプレゼントを受取り、他の二人は他人のプレゼントを受取る。

この場合の数は、$_2a_0=1$

$case$ 5) 2,4 が 夫々 2,4 のプレゼントを受取り、他の二人は他人のプレゼントを受取る。

この場合の数は、$_2a_0=1$

$case$ 6) 3,4 が 夫々 3,4 のプレゼントを受取り、他の二人は他人のプレゼントを受取る。

（6 通りになるのは、$_4C_2=6$ より。）

この場合の数は、$6\,_2a_0=6$

故に、

$_4a_0=4!-(_4a_4+_4a_3+_4a_2+_4a_1)=24-(1+6+8)=9$

4) $n=5$ のとき

$_5a_5=1$

$_5a_4=0$

$_5a_3=\,_5C_3\,_2a_0=10\times 1=10$

$_5a_2 = {}_5C_2\ {}_3a_0 = 10 \times 2 = 20$
$_5a_1 = {}_5C_1\ {}_4a_0 = 5 \times 9 = 45$
故に、
$_5a_0 = 5! - ({}_5a_5 + {}_5a_3 + {}_5a_2 + {}_5a_1) = 120 - (1 + 10 + 20 + 45) = 44$
5) $n = 6$ のとき
$_6a_6 = 1$
$_6a_5 = 0$
$_6a_4 = {}_6C_4\ {}_2a_0 = 15 \times 1 = 15$
$_6a_3 = {}_6C_3\ {}_3a_0 = 20 \times 2 = 40$
$_6a_2 = {}_6C_2\ {}_4a_0 = 15 \times 9 = 135$
$_6a_1 = {}_6C_1\ {}_5a_0 = 6 \times 44 = 264$
故に、
$_6a_0 = 6! - ({}_6a_6 + {}_6a_4 + {}_6a_3 + {}_6a_2 + {}_6a_1) = 720 - (1 + 15 + 40 + 135 + 264) = 265$

以下、この式から一般解を導く。
まず、予備工作。

組合せの数 $_iC_j$ を成分とした行列 $A = ({}_iC_j)$ $(0 \leqq i,\ j \leqq n)$ を作る。
例えば、$n = 4$ のとき、

$$\begin{pmatrix} {}_0C_0 & 0 & 0 & 0 \\ {}_1C_0 & {}_1C_1 & 0 & 0 \\ {}_2C_0 & {}_2C_1 & {}_2C_2 & 0 \\ {}_3C_0 & {}_3C_1 & {}_3C_2 & {}_3C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

次に行列 B を次のようにして作る。

$B = ((-1)^{(i+j)}_i C_j)$ $(0 \leqq i,\ j \leqq n)$

例えば、$n = 4$ のとき、

$$\begin{pmatrix} {}_0C_0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}_1C_0 & {}_1C_1 & 0 & 0 \\ {}_2C_0 & -{}_2C_1 & {}_2C_2 & 0 \\ -{}_3C_0 & {}_3C_1 & -{}_3C_2 & {}_3C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

この二つの行列 $A,\ B,$ の積 AB を作ると、単位行列 E になる。
従って、$B=A^{-1}$ であるらしい。$n=10$ のときで試してみる。

$$A=\begin{pmatrix}
{}_0C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_1C_0 & {}_1C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_2C_0 & {}_2C_1 & {}_2C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_3C_0 & {}_3C_1 & {}_3C_2 & {}_3C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_4C_0 & {}_4C_1 & {}_4C_2 & {}_4C_3 & {}_4C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_5C_0 & {}_5C_1 & {}_5C_2 & {}_5C_3 & {}_5C_4 & {}_5C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_6C_0 & {}_6C_1 & {}_6C_2 & {}_6C_3 & {}_6C_4 & {}_6C_5 & {}_6C_6 & 0 & 0 & 0 \\
{}_7C_0 & {}_7C_1 & {}_7C_2 & {}_7C_3 & {}_7C_4 & {}_7C_5 & {}_7C_6 & {}_7C_7 & 0 & 0 \\
{}_8C_0 & {}_8C_1 & {}_8C_2 & {}_8C_3 & {}_8C_4 & {}_8C_5 & {}_8C_36 & {}_8C_7 & {}_8C_8 & 0 \\
{}_9C_0 & {}_9C_1 & {}_9C_2 & {}_9C_3 & {}_9C_4 & {}_9C_5 & {}_9C_6 & {}_9C_7 & {}_9C_8 & {}_9C_9
\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}
{}_0C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}_1C_0 & {}_1C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_2C_0 & -{}_2C_1 & {}_2C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}_3C_0 & {}_3C_1 & -{}_3C_2 & {}_3C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_4C_0 & -{}_4C_1 & {}_4C_2 & -{}_4C_3 & {}_4C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}_5C_0 & {}_5C_1 & -{}_5C_2 & {}_5C_3 & -{}_5C_4 & {}_5C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_6C_0 & -{}_6C_1 & {}_6C_2 & -{}_6C_3 & {}_6C_4 & -{}_6C_5 & {}_6C_6 & 0 & 0 & 0 \\
-{}_7C_0 & {}_7C_1 & -{}_7C_2 & {}_7C_3 & -{}_7C_4 & {}_7C_5 & -{}_7C_6 & {}_7C_7 & 0 & 0 \\
{}_8C_0 & -{}_8C_1 & {}_8C_2 & -{}_8C_3 & {}_8C_4 & -{}_8C_5 & {}_8C_6 & -{}_8C_7 & {}_8C_8 & 0 \\
-{}_9C_0 & {}_9C_1 & -{}_9C_2 & {}_9C_3 & -{}_9C_4 & {}_9C_5 & -{}_9C_6 & {}_9C_7 & -{}_9C_8 & {}_9C_9
\end{pmatrix}$$

AB の $(7,3)$ 成分を作ってみる。
$(7,3)$ 成分 $={}_7C_0\cdot 0+{}_7C_1\cdot 0+{}_7C_2\cdot 0+{}_7C_3\cdot{}_3C_3+{}_7C_4\cdot{}_4C_3+{}_7C_5\cdot{}_5C_3+{}_7C_6$
$\cdot{}_6C_3+{}_7C_7\cdot{}_7C_3+0\cdot{}_8C_3+0\cdot{}_9C_3$

$$=\frac{7!}{3!4!}\cdot\frac{3!}{3!0!}-\frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{4!}{3!1!}+\frac{7!}{5!2!}\cdot\frac{5!}{3!2!}-\frac{7!}{6!1!}\cdot\frac{6!}{3!3!}+\frac{7!}{7!0!}\cdot\frac{7!}{3!4!}$$

$$=\frac{7!}{4!}\cdot\frac{1}{3!0!}-\frac{7!}{3!}\cdot\frac{1}{3!1!}+\frac{7!}{2!}\cdot\frac{1}{3!2!}-\frac{7!}{1!}\cdot\frac{1}{3!3!}+\frac{7!}{0!}\cdot\frac{1}{3!4!}$$

$$=\frac{7!}{3!}\cdot\frac{1}{4!0!}-\frac{7!}{3!}\cdot\frac{1}{3!1!}+\frac{7!}{3!}\cdot\frac{1}{2!2!}-\frac{7!}{3!}\cdot\frac{1}{1!3!}+\frac{7!}{3!}\cdot\frac{1}{0!4!}$$

分子、分母に 4! をかけて

$$= \frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{4!}{4!0!} - \frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{4!}{3!1!} + \frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{4!}{2!2!} - \frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{4!}{1!3!} + \frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{4!}{0!4!}$$

$$={}_7C_3({}_4C_0 - {}_4C_1 + {}_4C_2 - {}_4C_3 + {}_4C_4) = {}_7C_3(1-1)^4 = 0$$

一般に AB の (n,m) 成分 $(n>m)$ を作ると、

AB の (n,m) 成分 $= {}_nC_m\cdot{}_mC_m - {}_nC_{m+1}\cdot{}_{m+1}C_m + {}_nC_{m+2}\cdot{}_{m+2}C_m - \cdots(-1)^{q+m}\cdot{}_nC_q\cdot{}_qC_m + \cdots(-1)^{m+n}\cdot{}_nC_n\cdot{}_nC_m$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{m!0!}$$

$$- \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}\cdot\frac{(m+1)!}{m!0!}$$

$$+ \frac{n!}{(m+2)!(n-m-2)!}\cdot\frac{(m+2)!}{m!2!}$$

$$- \cdots + (-1)^{q+m}\frac{n!}{q!(n-q)!}\cdot\frac{q!}{m!(q-m)!}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+m}\frac{n!}{n!0!}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{1}{m!0!}$$

$$- \frac{n!}{(n-m-1)!}\cdot\frac{1}{m!1!}$$

$$+ \frac{n!}{(n-m-2)!}\cdot\frac{1}{m!2!}$$

$$- \cdots + (-1)^{q+m}\frac{n!}{(n-q)!}\cdot\frac{1}{m!(q-m)!}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+m}\frac{n!}{0!}\cdot\frac{1}{m!(n-m)!}$$

$$= \frac{n!}{m!}\cdot\frac{1}{(n-m)!0!}$$

$$- \frac{n!}{m!}\cdot\frac{1}{(n-m-1)!1!}$$

$$+\frac{n!}{m!}\cdot\frac{1}{(n-m-2)!2!}$$

$$-\cdots+(-1)^{q+m}\frac{n!}{m!}\cdot\frac{1}{(n-q)!(q-m)!}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+m}\frac{n!}{m!}\cdot\frac{1}{0!(n-m)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!m!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n-m)!0!}$$

$$-\frac{n!}{(n-m)!m!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n-m-1)!1!}$$

$$+\frac{n!}{(n-m)!m!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n-m-2)!2!}$$

$$-\cdots+(-1)^{q+m}\frac{n!}{(n-m)!m!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n-q)!(q-m)!}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+m}\frac{n!}{(n-m)!m!}\cdot\frac{(n-m)!}{0!(n-m)!}$$

$$={}_nC_m({}_{n-m}C_0-{}_{n-m}C_1+{}_{n-m}C_2-\cdots+(-1)^q\cdot{}_{n-m}C_q+\cdots$$

$$+(-1)^{n-m}\cdot{}_{n-m}C_{n-m})={}_nC_m(1-1)^{n-m}=0$$

上により、$AB=E$
左から B をかけて、

$$BAB=B$$

B には B^{-1} が存在するから、それを右からかけて、

$$BA=E$$

これで一般に、$B=A^{-1}$ が示された。

さて、本題に入る。
$n=5$ のとき、

$${}_5a_5=1$$

$${}_5a_4=0$$

$${}_5a_3={}_5C_3\cdot{}_2a_0$$

$_5a_2 =_5 C_2 \cdot {}_3a_0$

$_5a_1 =_5 C_1 \cdot {}_4a_0$

$_5a_0 =_5 C_0 \cdot {}_5a_0$

ここで、$_na_0$ を a_n と書くことにする。

(a_n は、n 人のパーティーで、自分のプレゼントを受取らない場合の数。)

また、$a_0 = 1$ と定義する。($a_1 = 0$ は自明。)

$_nC_m =_n C_{n-m}$ だから、上の式は、次のようにも書ける。

$_5a_5 =_5 C_0 \cdot a_0$

$_5a_4 =_5 C_1 \cdot a_1$

$_5a_3 =_5 C_2 \cdot a_2$

$_5a_2 =_5 C_3 \cdot a_3$

$_5a_1 =_5 C_4 \cdot a_4$

$_5a_0 =_5 C_5 \cdot a_5$

また勿論、

$_5a_0 +_5 a_1 +_5 a_2 +_5 a_3 +_5 a_4 +_5 a_5 = 5!$

また、一般に、

$_na_m =_n C_m \cdot a_m$

$_nC_0 \cdot a_0 +_n C_1 \cdot a_1 +_n C_2 \cdot a_2 + \cdots +_n C_k \cdot a_k + \cdots +_n C_n \cdot a_n = n!$

これを行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} {}_0C_0 & 0 & 0 & 0 & \\ {}_1C_0 & {}_1C_1 & 0 & 0 & \\ {}_2C_0 & {}_2C_1 & {}_2C_2 & 0 & \\ {}_3C_0 & {}_3C_1 & {}_3C_2 & {}_3C_3 & \\ & & \cdots & & \\ {}_nC_0 & {}_nC_1 & {}_nC_2 & \cdots & {}_nC_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ 2! \\ 3! \\ \cdot \\ \cdot \\ n! \end{pmatrix}$$

左から A^{-1} をかけて、

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_0C_0 & 0 & 0 & 0 & \\ -{}_1C_0 & {}_1C_1 & 0 & 0 & \\ {}_2C_0 & -{}_2C_1 & {}_2C_2 & 0 & \\ -{}_3C_0 & {}_3C_1 & -{}_3C_2 & {}_3C_3 & \\ & & \cdots & & \\ (-1)^n\cdot{}_nC_0 & (-1)^{n+1}\cdot{}_nC_1 & (-1)^{n+3}\cdot{}_nC_2 & \cdots & (-1)^{n+n}\cdot{}_nC_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ 2! \\ 3! \\ \cdot \\ \cdot \\ n! \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$a_n = (-1)^n\cdot{}_nC_0\cdot 0! + (-1)^{n+1}\cdot{}_nC_1\cdot 1! + (-1)^{n+2}\cdot{}_nC_2\cdot 2!$$

$$+\cdots + (-1)^{n+k}\cdot{}_nC_k\cdot k! + \cdots + (-1)^{n+n}\cdot{}_nC_n\cdot n!$$

$$= n!\left\{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^k}{k!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right\}$$

$\therefore$

$$\lim \frac{a_n}{n!} = e^{-1}$$

解終