問　計量　$ds^2 = \dfrac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$

が入っているとこ、次のそれぞれの二点の最短距離を求めよ。

(1)　$C(0,1)$ と $A\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$

(2) $A\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $B\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

(3) $C(0,1)$ と $B\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

解　(1) この場合は、最短距離は直線であるから、

$d(A,C) = \displaystyle\int_{1/3}^{1} ds = \int_{1/3}^{1} \frac{1}{y}\sqrt{ds^2 + dy^2} = \int_{1/3}^{1} \frac{dy}{y} = [\log y]_{1/3}^{1} = \log 3 =$ $1.0986...$

(2) この場合は、与えられた二点を通り、中心が x 軸上にある円が最短

距離であるから、与えられた二点の垂直二等分線と x 軸の交点を求める。

$x^2 + \left(y - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \left(x - \dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{5}\right)^2$

$9x + 3y = 5$

$y = 0$ を代入。

円の中心は $\left(\dfrac{5}{9},\ 0\right)$

半径を求めるために、点 $(0, 1/3)$ と中心の距離の二乗を求める。

$\left(\dfrac{5}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{34}{81}$

即ち、中心が $\left(\dfrac{5}{9},\ 0\right)$　半径 $\dfrac{\sqrt{34}}{9}$ の円。

円の中心から $\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ へ向かうベクトルと x 軸の正の方向とのなす角を α

とし、同じく円の中心から $\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ へ向かうベクトルと x 軸の正の方向と

のなす角を β とすると、

$$\tan\alpha = \frac{27}{11}, \quad \tan\beta = -\frac{3}{5}$$

あとで必要になるので、$\tan\dfrac{\alpha}{2}, \quad \tan\dfrac{\beta}{2}$ も求めておく。

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha/2}{1-\tan^2\alpha/2}$$

であるから、$\tan\alpha/2 = x$ とおいて、

$$\frac{27}{11} = \frac{2x}{1-x^2}$$

これを解いて、

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{850}}{27}$$

今の場合 x は正だから、

$$x = \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-11+\sqrt{850}}{27}$$

同様にして、

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{5+\sqrt{34}}{3}$$

$$d(A,B) = \int \frac{1}{y}\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{9}{\sqrt{34}\sin\theta}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{34}}{9}\right)^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{\sin\theta} = \left[\log\tan\frac{\theta}{2}\right]_\alpha^\beta = \log\tan\frac{\beta}{2} - \log\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$= \log\left(\frac{5+\sqrt{34}}{3}\right) - \log\left(\frac{-11+\sqrt{850}}{27}\right) = 1.6806997...$$

(3) CB の垂直二等分線を求める。

$$x^2+(y-1)^2 = \left(x-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{5}\right)^2$$

$2x - y = 0$

$y = 0$ のとき $x = 0$　　即ち、円の中心は原点。

(2) と同様に角度 $\alpha,\ \beta$ をとる。

$\tan\alpha/2 = 1/3, \quad \tan\beta/2 = 1$

$$d(CB) = \int \frac{1}{y}\sqrt{dx^2+dy^2} = \int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{\sin\theta} = [\log\tan\theta/2]_\alpha^\beta$$

$$= \log\tan\beta/2 - \log\tan\alpha/2 = \log 1 - \log 1/3 = \log 3 = 1.0986...$$

（解終り）

定理　曲面上の二点を結ぶ最短距離の曲線弧が存在するならば、

それは測地線の方程式を満たす。

解　証明の中で使うので予め次の計算をしておく。

$$F(\epsilon) = g_{\alpha\beta}(u^{(1)}(t)+\epsilon\lambda^{(1)}(t),\ u^{(2)}(t)+\epsilon\lambda^{(2)}(t))\left(\dot{u}^\alpha(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\alpha(t)\right)$$

$$\left(\dot{u}^\beta(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\beta(t)\right)$$

のとき、

$$\left.\frac{dF(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \quad \text{（を求めておく。）}$$

$$= \left.\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^1}\frac{d(u^1(t)+\epsilon\lambda^1(t))}{d\epsilon}\left(\dot{u}^\alpha(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\alpha(t)\right)\left(\dot{u}^\beta(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\beta(t)\right)\right|_{\epsilon=0}$$

$$+ \left.\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^2}\frac{d(u^2(t)+\epsilon\lambda^2(t))}{d\epsilon}\left(\dot{u}^\alpha(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\alpha(t)\right)\left(\dot{u}^\beta(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\beta(t)\right)\right|_{\epsilon=0}$$

$$\left.+g_{\alpha\beta}(u^{(1)}(t)+\epsilon\lambda^{(1)}(t),\ u^{(2)}(t)+\epsilon\lambda^{(2)}(t))\frac{d\left(\dot{u}^\alpha(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\alpha(t)\right)}{d\epsilon}\left(\dot{u}^\beta(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\beta(t)\right)\right|_{\epsilon=0}$$

$$\left.+g_{\alpha\beta}(u^{(1)}(t)+\epsilon\lambda^{(1)}(t),\ u^{(2)}(t)+\epsilon\lambda^{(2)}(t))\left(\dot{u}^\alpha(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\alpha(t)\right)\frac{d\left(\dot{u}^\beta(t)+\epsilon\dot{\lambda}^\beta(t)\right)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

$$= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^1}\lambda^1 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^2}\lambda^2 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + g_{\alpha\beta}\dot{\lambda}^\alpha \dot{u}^\beta + g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{\lambda}^\beta$$

$$= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\lambda^\gamma \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2g_{\gamma\beta}\dot{\lambda}^\gamma \dot{u}^\beta$$

この結果を後で使う。

また、$F(0) = g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$

は、自明。

　さて証明。

曲面上の定点 P から Q までの曲線を C とし、

$C : \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(u^1(t), u^2(t))$

とする。 $t \in [0,1]$ としてよい。

曲面の第一基本量を $g_{\alpha\beta}$ とすれば、C の長さ $s(C)$ は、

$$s(C) = \int_0^1 \sqrt{g_{\alpha\beta}(u^1(t), u^2(t))\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}dt$$

両端 P, Q を固定して、他の部分を少し移動させた曲線 C' は、

$$C' :\ \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(u^1(t) + \epsilon\lambda^1(t), u^2(t) + \epsilon\lambda^2(t))$$

　但し、 $\lambda^\alpha(0) = \lambda^\alpha(1) = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$

$$s(C') = \int_0^1 \sqrt{g_{\alpha\beta}(u^{(1)}(t) + \epsilon\lambda^{(1)}(t),\ u^{(2)}(t) + \epsilon\lambda^{(2)}(t))\left(\dot{u}^\alpha(t) + \epsilon\dot{\lambda}^\alpha(t)\right)\left(\dot{u}^\beta(t) + \epsilon\dot{\lambda}^\beta(t)\right)}dt$$

この積分の被積分函数の根号の中味は先に計算した $F(\epsilon)$ であるから、

$$= \int_0^1 \sqrt{F(\epsilon)}dt$$

$s(C')$ を ϵ の函数と考えたとき、ϵ がゼロのとき極小値をとることが必要。

$$\left.\frac{dS(C')}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{F(0)}}\left(\left.\frac{dF(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma}\lambda^\gamma \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2g_{\gamma\beta}\dot{\lambda}^\gamma \dot{u}^\beta\right)dt$$

ここでパラメター t をはじめの曲線弧 C の弧長にとれば、

$$g_{\alpha\beta}\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}=1$$

であるから、

$$\left.\frac{dS(C')}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}\lambda^{\gamma}+g_{\gamma\beta}\dot{\lambda}^{\gamma}\dot{u}^{\beta}\right)ds$$

第二項に部分積分を施して、

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}\lambda^{\gamma}\right)ds+\left[\lambda^{\gamma}g_{\gamma\beta}\dot{u}^{\beta}\right]_0^1-\int_0^1\gamma^{\lambda}\frac{d}{ds}(g_{\gamma\beta}\dot{u}^{\beta})ds$$

この第 2 項は函数 λ の性質から 0 。

$=\displaystyle\int_0^1\left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}-\frac{d}{ds}(g_{\gamma\beta}\dot{u}^{\beta})\right]\lambda^{\gamma}ds S(C)$ が最短距離であるから、$\left.\dfrac{dS(C')}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$

$$\therefore\frac{d}{ds}(g_{\gamma\beta}\dot{u}^{\beta})-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}=0$$

$$\therefore g_{\gamma\beta}\ddot{u}^{\beta}+\left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^{\alpha}}\dot{u}^{\alpha}\right)\dot{u}^{\beta}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}=0$$

$$\therefore g_{\gamma\beta}\ddot{u}^{\beta}+\left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^{\alpha}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\right)\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}=0$$

ここで、

$$\left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^{\alpha}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\right)\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}=\left(\frac{\partial g_{\gamma1}}{\partial u^{1}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^{\gamma}}\right)\dot{u}^{1}\dot{u}^{1}+\left(\frac{\partial g_{\gamma2}}{\partial u^{1}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^{\gamma}}\right)\dot{u}^{1}\dot{u}^{2}$$

$$+\left(\frac{\partial g_{\gamma1}}{\partial u^{2}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{21}}{\partial u^{\gamma}}\right)\dot{u}^{2}\dot{u}^{1}+\left(\frac{\partial g_{\gamma2}}{\partial u^{2}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^{\gamma}}\right)\dot{u}^{2}\dot{u}^{2}$$

$$=[11,\gamma]\dot{u}^1\dot{u}^1+2[12,\gamma]\dot{u}^1\dot{u}^2[22,\gamma]\dot{u}^2\dot{u}^2=[\alpha\beta,\gamma]\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}$$

であるから、

$$\therefore\quad g_{\gamma\beta}\ddot{u}^{\beta}+[\alpha\beta,\gamma]\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}=0\qquad(\gamma=1,2)$$

$$\therefore\quad g_{11}\ddot{u}^1+g_{12}\ddot{u}^2=-[\alpha\beta,1]\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}$$

$$g_{21}\ddot{u}^1+g_{22}\ddot{u}^2=-[\alpha\beta,2]\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}$$

$\therefore$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}^1 \\ \ddot{u}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[\alpha\beta, 1] \\ -[\alpha\beta, 2] \end{pmatrix} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

逆行列を左からかけて、

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}^1 \\ \ddot{u}^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -[\alpha\beta, 1] \\ -[\alpha\beta, 2] \end{pmatrix} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

即ち、

$\ddot{u}^1 = - \left\{ {1 \atop \alpha\beta} \right\} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$

$\ddot{u}^2 = - \left\{ {2 \atop \alpha\beta} \right\} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$

これは測地線の方程式。　　　（証明終り）