（スミルノフ訳書４、369 頁）

§ 130. $Gauss$ の第一基本形式

問　曲面 S ： $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

　S 上の曲線 ($x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)),\ z(u(t),v(t))$)

が与えられているとき、

　この曲線の線素 ds の２乗 ds^2を求めよ。

解　$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)^2 +$
$\left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2$
$= \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right)du^2$
$+ 2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dudv +$
$\left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right)dv^2$

（解終り）

問　$\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u),\ \mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v),$ とおき、前問の ds^2 の du^2 の係数をＥ、$dudv$ の係数をＦ、dv^2 の係数をＧ、としたとき、Ｅ，Ｆ，Ｇ を $\mathbf{r}_u$、$\mathbf{r}_v$ で表せ。

解　Ｅ $= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \mathbf{r}_u^2$

　Ｆ $= 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) = 2\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v$

　Ｇ $= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \mathbf{r}_v^2$

（解終り）

問　上の S の面分 dS を求めよ。

解　$dS = \sqrt{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v} dudv = \sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2}$

$= \sqrt{\left| \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \right|} dudv = \sqrt{\left| \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u^2 & \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v^2 \end{pmatrix} \right|} dudv$

$= \sqrt{EG - F^2} dudv$

（解終り）

問　上の S の単位法線ベクトル $\mathbf{m}$ を求めよ。

（解）　$\mathbf{m} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\left| \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \right|}$

131 $Gauss$ の第 2 基本形式

$Recall$　　$C:$ $\mathbf{r} = (x(t),\ y(t),\ z(t)\ )$　曲線

接線ベクトル $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}$

ここで $\left|\mathbf{t}\right| = 1$　$(\because d\mathbf{r}d\mathbf{r} = ds^2)$

$\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}$

ここで $\left|\mathbf{n}\right| = 1$　($\because$ となるように κ を定義したのであ った)

$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$

$\mathbf{t}$ と $\mathbf{n}$ ではる平面を C の、点 P における接触平面という。

$\mathbf{b}$ を陪法線、又は従法線という。

また、$\dfrac{1}{\kappa} = \rho$ を曲率半径、κ を曲率という。

$Recall$　$\dfrac{d\mathbf{b}}{ds}$ は、$\mathbf{t},\ \mathbf{b}$ の両方に垂直。即ち $\mathbf{n}$ に平行。

証明　$\mathbf{b}\mathbf{b}=1$

$\therefore \quad \dfrac{d\mathbf{b}}{ds}\mathbf{b}=0$

$\therefore \quad \dfrac{d\mathbf{b}}{ds}\perp \mathbf{b}$

　また

$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$

$\therefore \quad \dfrac{d\mathbf{b}}{ds}=\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\times\mathbf{n}+\mathbf{t}\times\dfrac{d\mathbf{n}}{ds}=\kappa\mathbf{n}\times\mathbf{n}+\mathbf{t}\times\dfrac{d\mathbf{n}}{ds}=\mathbf{t}\times\dfrac{d\mathbf{n}}{ds}$

$\therefore \quad \dfrac{d\mathbf{b}}{ds}\perp \mathbf{t} \qquad\qquad QED$

定義　　上の $Recall$ から

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\tau\mathbf{n}$$

となるが、この τ を曲線 C の点 P における捩率という。

命題　　S が曲面で　　$S=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\ )$ と表されている。

$\mathbf{r}$ は S 上の曲線で　$\mathbf{r}=(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t))\ )$ と表されている。

P は $\mathbf{r}$ 上の一点。

$\mathbf{m}$ は S 上の P における単位法線ベクトル。

$\mathbf{n}$ は $\mathbf{r}$ 上の P における単位法線ベクトル。

ϕ は $\mathbf{n}$ と $\mathbf{m}$ とのなす角

のとき、次の式が成立する。

$$\frac{cos\phi}{\rho}=-\frac{d\mathbf{r}d\mathbf{m}}{ds^2} \qquad ...(46_1)$$

証明　　$\mathbf{t}\mathbf{m}=0$

$\therefore \quad \dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\mathbf{m}+\mathbf{t}\dfrac{d\mathbf{m}}{ds}=0$

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{nm} + \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d\mathbf{m}}{ds} = 0$$

$$\frac{cos\phi}{\rho} = -\frac{d\mathbf{r}d\mathbf{m}}{ds^2} \qquad QED$$

問（上の命題の意味を知るための練習）

中心が $(0,0,0)$ 半径が a の球の表面を、次のパラメータ平面 K で表す。

$$K = \left\{\ (v,u) : 0 < v < 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$x = a\cos u\cos v$$

$$y = a\cos u\sin v$$

$$z = a\sin v$$

このとき、次の問に答えよ。

1)　点 $P\ \left(x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right), z\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\right)$ の法線方向を求めよ。

2)　点 P を通る曲線 $\mathbf{r}\ \left(x\left(v,\frac{\pi}{4}\right), y\left(v,\frac{\pi}{4}\right), z\left(v,\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $(0 < v < 2\pi)$ の点 P における法線方向を求めよ。

解　1) を解く。

$$\mathbf{r}_u = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u)$$

$$\mathbf{r}_v = (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\begin{vmatrix}-a\sin u\sin v & a\cos u\\ a\cos u\cos v & 0\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-a\sin u\cos v & a\cos u\\ -a\cos u\sin v & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-a\sin u\cos v & -a\sin u\sin v\\ -a\cos u\sin v & a\cos u\cos v\end{vmatrix}\right)$$

$$= (-a^2\cos u^2\cos v,\ \ -a^2\cos u^2\sin v,\ \ -a^2\sin u\cos u)$$

これに $v = \frac{\pi}{4},\ u = \frac{\pi}{4}$ を代入して、

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(-\frac{a^2}{2\sqrt{2}},\ \ -\frac{a^2}{2\sqrt{2}},\ \ -\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right| = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right|} = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{1) の答。}$$

2) を解く。そのためにまづ、弧長 s を求める。

$$\mathbf{r} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos v,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\sin v,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \frac{d\mathbf{r}}{dv} = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin v,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\cos v,\ 0\right)$$

$$\therefore \quad ds^2 = \frac{d\mathbf{r}}{dv}\frac{d\mathbf{r}}{dv} = \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \quad s = \int_0^v \sqrt{\frac{a^2}{2}}\,dv = \frac{a}{\sqrt{2}}v$$

$$\therefore \quad v = \frac{\sqrt{2}}{a}s$$

もとの曲線の方程式を弧長 s で表せば、

$$\mathbf{r} = \left(\frac{a}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{a}s,\ \frac{a}{2}\sin\frac{\sqrt{2}}{a}s,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

これを s で微分したものが接線の方向 $\mathbf{t}$。即ち、

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(-\sin\frac{\sqrt{2}}{a}s,\ \cos\frac{\sqrt{2}}{a}s,\ 0\right)$$

これを s で微分したものが $\kappa\mathbf{n}$。即ち、

$$\kappa\mathbf{n} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{a}\cos\frac{\sqrt{2}}{a}s,\ -\frac{\sqrt{2}}{a}\sin\frac{\sqrt{2}}{a}s,\ 0\right)$$

$v = \dfrac{\pi}{4}$ のとき $s = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\dfrac{\pi}{4}$ 。これを代入して、

$$\mathbf{t} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

$$\kappa\mathbf{n} = \left(-\frac{1}{a},\ -\frac{1}{a},\ 0\right)$$

$$\therefore \quad \kappa^2 = \frac{2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \kappa = \frac{\sqrt{2}}{a}$$

$$\therefore \quad \mathbf{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \qquad \text{（解おわり）}$$

以上、地道に計算して答を出したのだが、点 P は球面上の点であり、与えられた曲線は緯度線であることを考慮すれば、地道な計算なしで答は出る。曲面に対する法線 $\mathbf{m}$ と、曲線に対する法線 $\mathbf{n}$ の違いはこの問によってはっきりする筈である。

問　前命題の $d\mathbf{r}$ の $\mathbf{r}$ を曲面 S 上を表す $\mathbf{r}$ と考えて、$-\,d\mathbf{r}d\mathbf{m}$ を u, v で表せ。

解　$-\,d\mathbf{r}d\mathbf{m} = -(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)(\mathbf{m}_u du + \mathbf{m}_v dv)$

$= (-\mathbf{r}_u \mathbf{m}_u)du^2 + (-\mathbf{r}_u \mathbf{m}_v - \mathbf{r}_v \mathbf{m}_u)dudv + (-\mathbf{r}_v \mathbf{r}_v)dv^2$ （解終り）

定義　上の du^2、$dudv$、dv^2 の係数をそれぞれ L、$2M$、N とおき、即ち

$$L = -\mathbf{r}_u \mathbf{m}_u$$

$$2M = -\mathbf{r}_u \mathbf{m}_v - \mathbf{r}_v \mathbf{m}_u$$

$$N = -\mathbf{r}_v \mathbf{r}_v$$

とおき、

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

を、「$Gauss$ の第二基本形式」という。これを用いれば、(46_1) は、

$$\frac{cos\phi}{\rho} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \quad \cdots \ (48)$$

命題　$L = \dfrac{\mathbf{r}_{uu}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad \ldots.\ (50_1)$

$$M = \frac{\mathbf{r}_{uv}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad \ldots.\ (50_2)$$

$$N = \frac{\mathbf{r}_{vv}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \qquad .... \ (50_3)$$

証明　　(50_1) を示す。

$$\mathbf{r}_u\mathbf{m} = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m} + \mathbf{r}_u\mathbf{m}_u = 0$$

$$\therefore \quad -\mathbf{r}_u\mathbf{m}_u = \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_{uu}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

この左辺は L であるから、これで示された。

次に、(50_2) を示す。

$$\mathbf{r}_{uv}\mathbf{m} + \mathbf{r}_u\mathbf{m}_v = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{r}_u\mathbf{m}_v = -\mathbf{r}_{uv}\mathbf{m}$$

また、　$\mathbf{r}_v\mathbf{m} = 0$

$$\therefore \quad \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m} + \mathbf{r}_v\mathbf{m}_u = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{r}_v\mathbf{m}_u = -\mathbf{r}_{uv}\mathbf{m}$$

$$\therefore \quad M = -\frac{1}{2}(\mathbf{r}_v\mathbf{m} + \mathbf{r}_v\mathbf{m}_u) = \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m} = \mathbf{r}_{uv}\frac{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

次に、(50_3) を示す。

$$\mathbf{r}_{vv}\mathbf{m} + \mathbf{r}_v\mathbf{m}_v = 0$$

$$\therefore \quad -\mathbf{r}_v\mathbf{m}_v = \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_{vv}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

この左辺は N であるから、これで示された。　　QED

問　　特に $S:$ 曲面が $z = f(x,y)$ で表されているとき、E, F, G, L, M, N を、

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

で表せ。

解　　S は、$\mathbf{r} = (x,\ y,\ f(x,y)) \quad u = x,\ v = y$　と表せる。

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1,\ 0,\ p)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0,\ 1,\ q)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u \partial u} = (0,\ 0,\ r)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u \partial v} = (0,\ 0,\ s)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v \partial v} = (0,\ 0,\ t)$$

$$\therefore \quad E = \mathbf{r}_u^2 = 1 + p^2$$

$$F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = pq$$

$$G = \mathbf{r}_v^2 = 1 + q^2$$

$$EG - F^2 = (1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2 = 1 + p^2 + q^2$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\begin{vmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-p,\ -q,\ 1)$$

$$\therefore \quad L = \frac{\mathbf{r}_{uu}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{(0,0,r)(-p,-q,1)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{r}{\sqrt{EG-F^2}}$$

同様に、 $$M = \frac{\mathbf{r}_{uv}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{s}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$N = \frac{\mathbf{r}_{vv}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{t}{\sqrt{EG-F^2}}$$

（解終り）

練習問題　1) 双曲放物面 $\mathbf{r} = (x, y, xy)$ の点 $(1,1,1)$ における E, F, G, L, M, N を求めよ。

2) 楕円放物面 $\mathbf{r} = (x, y, x^2+y^2)$ の点 $(1,1,2)$ における E, F, G, L, M, N を求めよ。

答　1) $E = 2,\ F = 1,\ G = 2,\ L = 0,\ M = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ N = 0$

2) $E=5,\ F=4,\ G=5,\ L=\dfrac{2}{3},\ M=0,\ N=\dfrac{2}{3}$　　答終り

定義　S：曲面

P：S 上の一点

$\mathbf{m}$：P における単位法線ベクトル

が与えられているとき

$\mathbf{m}$ を含む平面で S を切った時に出来る曲線を「曲面 S の点 P における直截口（ちょくせつこう）」という。

命題　直截口の点 P における曲率 $\dfrac{1}{\rho}(=\kappa)$ は

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

証明　$\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ とのなす角は、0° か、180° である。

従って、(48) 式の $\cos\phi$ は 1 或は -1。即ち、上の式が示された。

（証明おわり）

定義　直截口の曲率半径を R と書く。（そして符号も含める。）

即ち、 $$\frac{1}{R}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} \qquad \dots (56)$$

(56) 式の右辺の分子、分母を du^2 で割って、$\dfrac{dv}{du}$ を t とおくと、

$$\frac{1}{R}=\frac{L+2Mt+Nt^2}{E+2Ft+Gt^2}$$

この右辺の分母はいかなる t の値に対しても 0 にならない。（何故ならば $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ は弧長だから。）

分子は、$t=\dfrac{dv}{du}$ の値によって符号が変化する可能性がある。

符号の変化の可能性を次の三つに分類する。

(1) プラスならプラスだけ、マイナスならマイナスだけしか取らない場合。(即ち、分子を t に関する二次式と考えた時、判別式がマイナスのとき。)この時は、この曲面の近傍で曲率の符号が変らないから、そこで曲面は膨らんでいることが分る。

(2) プラスにもマイナスにも成り得る場合。(即ち、分子を t に関する二次式と考えた時、判別式がプラスのとき。)この時は、この曲面の近傍で、曲率がプラス、マイナスの値をとるので、そこで曲面は鞍点になっていることが分る。

(3) ある一つの方向で 0 になり、それ以外は符号を変えない場合。(即ち、分子を t に関する二次式と考えた時、判別式が 0 のとき。)この時は、この曲面の近傍のある一方向で曲率が 0 になり、それ以外は同じ符号なので、そこで曲面は、円柱のようになっていることが分る。

上記のことを考慮に入れ、次のように定義する。

定義　1) $M^2 - LN < 0$ のとき、点 P は楕円的であるという。

2) $M^2 - LN > 0$ のとき、点 P は双曲的であるという。

3) $M^2 - LN = 0$ のとき、点 P は放物的であるという。(定義おわり)

予備工作　$x,\ y$ が陰函数表示

$$f(x,y) = 0$$

されているときの、y の x に関する極値を求めるための必要条件は何か。

解　y が極値(x に対して)をとるときは、

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{が必要。}$$

即ち、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$　だから、

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$　が必要。　(解おわり)

問　直截口の曲率の式 (56) から R^{-1}の最大値、最小値を求めよ。

解　$ER^{-1}du^2 + 2FR^{-1}dudv + GR^{-1}dv^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$

$$(L - ER^{-1})du^2 + 2(M - FR^{-1})dudv + (N - GR^{-1})dv^2 = 0$$

dv^2 で割って、$\dfrac{du}{dv} = t$ とおいて、

$$\phi(R^{-1}, t) = (L - ER^{-1})t^2 + 2(M - FR^{-1})t + (N - GR^{-1})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 2(L - ER^{-1})t + 2(M - FR^{-1}) = 0$$

予備工作を用いて、　$\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 2(L - ER^{-1})t + 2(M - FR^{-1}) = 0$　とおく。

$$\therefore \quad (L - ER^{-1})\frac{du}{dv} + (M - FR^{-1}) = 0$$

また、du^2 で割って、$\dfrac{dv}{du} = t_1$ とおいて、

$$\phi_1(R^{-1}, t_1) = (L - ER^{-1}) + 2(M - FR^{-1})t_1 + (N - GR^{-1})t_1^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_1} = 2(N - GR^{-1})t_1 + 2(M - FR^{-1}) = 0$$

$$\therefore \quad (N - GR^{-1})\frac{dv}{du} + (M - FR^{-1}) = 0$$

$\dfrac{du}{dv}$ を消去して

$$\frac{M - FR^{-1}}{L - ER^{-1}} = \frac{N - GR^{-1}}{M - FR^{-1}}$$

$$\therefore \quad M^2 - 2FMR^{-1} + F^2R^{-2} = LN - LGR^{-1} - ENR^{-1} + EGR^{-2} = 0$$

$$\therefore \quad (EG - F^2)\frac{1}{R^2} - (EN - 2FM + LG)\frac{1}{R} + (LN - M^2) = 0$$

この２次方程式の２根 $\dfrac{1}{R_1}, \dfrac{1}{R_2}$ が答。　　　　（解おわり）

定義　上の $\dfrac{1}{R_1}, \dfrac{1}{R_2}$ の積 K を「$Gauss$ の曲率」といい、その平均値 H を「平均曲率」という。

即ち、　$K = \dfrac{1}{R_1R_2} = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{EN-2FM+LG}{2(EG-F^2)}$$

問　(S) :　曲面　　$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$

　(S_1) :　(S) をもとに、法線方向に距離 $n(u,v)$ だけ離れたところ

　　にある曲面

このとき、(S) の面積 S と (S_1) の面積 S_1 の差を求めよ。

（但し、$n,\ n_u,\ n_v$ の 2 次の項は無視せよ。）

解　(S_1) を $\mathbf{r}^{(1)}(u,v)$ とすれば、

$$\mathbf{r}^{(1)}=\mathbf{r}+n\ \mathbf{m}$$

$$\mathbf{r}^{(1)}_u=\mathbf{r}_u+n_u\ \mathbf{m}+n\ \mathbf{m}_u$$

$$\mathbf{r}^{(1)}_v=\mathbf{r}_v+n_v\ \mathbf{m}+n\ \mathbf{m}_v$$

曲面の面積を求めるために、曲面分を求める。

$E_1=\mathbf{r}^{(1)}_u\ \mathbf{r}^{(1)}_u=(\mathbf{r}_u+n_u\ \mathbf{m}+n\ \mathbf{m}_u)(\mathbf{r}_u+n_u\ \mathbf{m}+n\ \mathbf{m}_u)$

$=\mathbf{r}_u^2+2n_u\ \mathbf{r}_u\ \mathbf{m}+2n\ \mathbf{r}_u\ \mathbf{m}_u$

$=E-2nL$

$F_1=\mathbf{r}^{(1)}_u\ \mathbf{r}^{(1)}_v=\mathbf{r}_u\ \mathbf{r}_v+n_u\ \mathbf{m}\mathbf{r}_u+n_v\ \mathbf{m}\mathbf{r}_v+n\ (\mathbf{r}_v\mathbf{m}_u+\mathbf{r}_u\mathbf{m}_v)$

$=F-2nM$

$G_1=\mathbf{r}^{(1)}_v\ \mathbf{r}^{(1)}_v=\mathbf{r}_v\mathbf{r}_v+2n_v\mathbf{m}\mathbf{r}_v+2n\mathbf{r}_v\mathbf{m}_v$

$=G-2nN$

$\therefore\quad E_1G_1-F^2=(E-2nL)(G-2nN)-(F-2nM)^2$

$=EG-2n(EN+GL)-F^2+4nFM$

$=(EG-F^2)-2n(EN-2Fm+GL)$

$=(EG-F^2)(1-4nH)$　　（$\because$　平均曲率 H の定義参照）

$$\therefore \quad \sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = \sqrt{EG - F^2}(1 - 2nH)$$

$$(\because \quad (1 - 4nH)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(4nH) + \cdots)$$

$$\therefore \quad \iint_{S_1} \sqrt{E_1G_1 - {F_1}^2}\, du\, dv - \iint_S \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = -\iint_S 2nH\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

（解終り）

問　上の結果から、面積が極値をとるときの、曲面の条件を述べよ。

解　$H = 0$　即ち、

$$EN - 2Fm + GL = 0$$

（解終り）

問　曲面が $z = f(x, y)$ と表されているとき、上の条件はどう書けるか。

解　$E = 1 + p^2,\ F = pq,\ G = 1 + q^2$

$$L = \frac{r}{\sqrt{EG - F^2}},\ M = \frac{s}{\sqrt{EG - F^2}},\ N = \frac{t}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0$$

（解終り）

ここで、$Gauss$ の公式、$Weingarten$ の公式、測地線の方程式を導く。

定義 ($Christoffel$ の記号)

$\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$ を $Christoffel$ の第二記号といい、次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

として、

$$\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2} g^{\gamma 1} \left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{1\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{2} g^{\gamma 2} \left(\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{2\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^2} \right)$$

と定義する。

命題　($Gauss$ の公式)

$$\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial u} = \mathbf{x}_{11},\ \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial v} = \mathbf{x}_{12} \qquad etc.$$ と書く。

すると、次の式が成立する。これらを $Gauss$ の公式 という。

$\mathbf{x}_{11} = \left\{ {1 \atop 11} \right\} \mathbf{x}_1 + \left\{ {2 \atop 11} \right\} \mathbf{x}_2 + h_{11}\mathbf{N}$

$\mathbf{x}_{12} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} \mathbf{x}_1 + \left\{ {2 \atop 12} \right\} \mathbf{x}_2 + h_{12}\mathbf{N}$

$\mathbf{x}_{22} = \left\{ {1 \atop 22} \right\} \mathbf{x}_1 + \left\{ {2 \atop 22} \right\} \mathbf{x}_2 + h_{22}\mathbf{N}$

証明　$\mathbf{x}_{11} = \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_1 + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_1 + \Gamma_{11}\mathbf{N}$

とおき、Γ^1_{11}、$\Gamma^2_{11},\ \Gamma_{11}$ を求める。

（$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{N}$ は一次独立だから、$\mathbf{x}_{11}$ はこれらの線形結合で表せる。）

$\mathbf{x}_1$ をかけて、

$\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_1 = \Gamma^1_{11}g_{11} + \Gamma^2_{11}g_{12}$

$\mathbf{x}_2$ をかけて、

$\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_2 = \Gamma^1_{11}g_{21} + \Gamma^2_{11}g_{22}$

$$\therefore \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_1 & g_{12} \\ \mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_2 & g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{g_{22}}{g}\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_1 - \frac{g_{12}}{g}\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_2$$

$= g^{11}\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_1 + g^{12}\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_2$

$\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_1$ を g で表すために、$\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$ を計算する。

$g_{11} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = \mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_{11} = 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{11}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x}_1\mathbf{x}_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$$

次に、$\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_2$ を g で表すために、

$\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$ を計算する。

$g_{21} = \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1$

$\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1} = \mathbf{x}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_{11}$

$\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1} = \mathbf{x}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_{11}$

$\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \mathbf{x}_{12}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_{21}$

$\therefore \quad \dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{11}$

$\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$ は、$\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$ とも書けるから、
求める Γ^1_{11} は、次のように書ける。

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)$$
$$= \left\{ {1 \atop 11} \right\}$$

また、 $\Gamma^2_{11} = \dfrac{\begin{vmatrix} g_{11} & \mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_1 \\ g_{21} & \mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_2 \end{vmatrix}}{g} = \dfrac{g_{11}}{g}\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_2 - \dfrac{g_{21}}{g}\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_1$
$= g^{22}\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_2 + g^{21}\mathbf{x}_{11}\mathbf{x}_1$

次に Γ_{11} を求める。

N をかけて、

$$\mathbf{x}_{11}N = \Gamma_{11}$$

$$\therefore \quad \Gamma_{11} = L = h_{11}$$

これで１番目の式が出た。

ここで一般的に $\mathbf{x}_\gamma\mathbf{x}_{\alpha\beta}$ を g で表すために、$\dfrac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} + \dfrac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} - \dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}$を計算する。

$\dfrac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} = \mathbf{x}_{\gamma\beta}\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{x}_\gamma\mathbf{x}_{\alpha\beta}$

$\dfrac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} = \mathbf{x}_{\gamma\alpha}\mathbf{x}_\beta + \mathbf{x}_\gamma\mathbf{x}_{\alpha\beta}$

$$\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\gamma}\mathbf{x}_\beta + \mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_{\beta\gamma}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = 2\mathbf{x}_\gamma\mathbf{x}_{\alpha\beta}$$

以下、上の式の左辺の 1/2 を $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ とおく。即ち、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right) = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$$

とおく。（これを「$Christoffel$ の第１記号」という。）

この定義を設けると、クリストッフェルの第２記号 $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}$ の定義から、

$$\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} = g^{\gamma 1}\Gamma_{\alpha\beta,1} + g^{\gamma 2}\Gamma_{\alpha\beta,2}$$

となる。

次に、２番目の式を示す。

$$\mathbf{x}_{12} = \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_1 + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_2 + \Gamma_{12}\mathbf{N}$$

$\mathbf{x}_1$ をかけて、

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{12} = \Gamma^1_{12}g_{11} + \Gamma^2_{12}g_{12}$$

$\mathbf{x}_2$ をかけて、

$$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{12} = \Gamma^1_{12}g_{21} + \Gamma^2_{12}g_{22}$$

$$\therefore \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_{12} & g_{12} \\ \mathbf{x}_2\mathbf{x}_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = \frac{g_{22}}{g}\Gamma_{12,1} - \frac{g_{12}}{g}\Gamma_{12,2}$$

$$= g^{11}\Gamma_{12,1} + g^{12}\Gamma_{12,2} = \left\{ {1 \atop 12} \right\}$$

Γ_{12} を求めるには、両辺に $\mathbf{N}$ をかけて、

$$\Gamma_{12} = \mathbf{x}_{12}\mathbf{N} = M = h_{12}$$

最後に３番目の式を示す。

$$\mathbf{x}_{22} = \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_1 + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_2 + \Gamma_{22}\mathbf{N}$$

$\mathbf{x}_1$ をかけて、

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{22} = \Gamma^1_{22}g_{11} + \Gamma^2_{22}g_{12}$$

$\mathbf{x}_2$ をかけて、

$$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{22} = \Gamma^1_{22}g_{21} + \Gamma^2_{22}g_{22}$$

$$\therefore \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_{22} & g_{12} \\ \mathbf{x}_2\mathbf{x}_{22} & g_{22} \end{vmatrix} = \frac{g_{22}}{g}\Gamma_{22,1} - \frac{g_{12}}{g}\Gamma_{22,2}$$

$$= g^{11}\Gamma_{22,1} + g^{12}\Gamma_{22,2} = \left\{ {1 \atop 22} \right\}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} g_{11} & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_{22} \\ g_{21} & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_{22} \end{vmatrix} = \frac{g_{11}}{g}\Gamma_{22,2} - \frac{g_{21}}{g}\Gamma_{22,1}$$

$$= g^{22}\Gamma_{22,2} + g^{21}\Gamma_{22,1} = \left\{ {2 \atop 22} \right\}$$

Γ_{22} を求めるには、両辺に $\mathbf{N}$ をかけて、

$$\Gamma_{22} = \mathbf{x}_{22}\mathbf{N} = N = h_{22} \qquad \text{（証明終）}$$

命題 （$Weingarten$ の公式）

$$\mathbf{N}_1 = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^1} = -(h_{11}g^{11} + h_{12}g^{21})\mathbf{x_1} - (h_{11}g^{12} + h_{12}g^{22})\mathbf{x_2}$$

$$\mathbf{N}_2 = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^2} = -(h_{21}g^{11} + h_{22}g^{21})\mathbf{x_1} - (h_{21}g^{12} + h_{22}g^{22})\mathbf{x_2}$$

$Einstein$ の記号を使えば、次のように書ける

$$\mathbf{N}_1 = -(h_{1\alpha}g^{\alpha 1})\mathbf{x_1} - (h_{1\alpha}g^{\alpha 2})\mathbf{x_2} = -(h_{1\alpha}g^{\alpha\beta})\mathbf{x}_\beta$$

$$\mathbf{N}_2 = -(h_{2\alpha}g^{\alpha 1})\mathbf{x_1} - (h_{2\alpha}g^{\alpha 2})\mathbf{x_2} = -(h_{2\alpha}g^{\alpha\beta})\mathbf{x}_\beta$$

もっと簡単に、$\delta = 1,\ 2$ として、

$$\mathbf{N}_\delta = -(h_{\delta\alpha}g^{\alpha\beta})\mathbf{x}_\beta$$

証明 $\mathbf{N}\mathbf{N} = 1$

$$\therefore \quad \mathbf{N}_\alpha\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{N}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$\therefore \quad \mathbf{N}\mathbf{N}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

即ち、$\mathbf{N}_\alpha$ は、$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2$ のはる平面内にある。故に $\mathbf{N}_1$は、

$$\mathbf{N}_1 = \Lambda_1^1 \mathbf{x}_1 + \Lambda_1^2 \mathbf{x}_2$$

とおける。

$\mathbf{x}_1$ をかける。$\mathbf{x}_1 \mathbf{N}_1 = -h_{11}$ であるから、

$$-h_{11} = \Lambda_1^1 g_{11} + \Lambda_1^2 g_{12}$$

$\mathbf{x}_2$ をかける。$\mathbf{x}_2 \mathbf{N}_1 = -h_{21}$ であるから、

$$-h_{21} = \Lambda_1^1 g_{21} + \Lambda_1^2 g_{22}$$

これを解いて、 $\Lambda_1^1 = \dfrac{1}{g} \begin{vmatrix} -h_{11} & g_{12} \\ -h_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = -\dfrac{g_{22}}{g} h_{11} + \dfrac{g_{12}}{g} h_{12}$

$= -h_{11} g^{11} - h_{12} g^{21} = -h_{1\alpha} g^{\alpha 1}$

$$\Lambda_2^1 = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} g_{11} & -h_{11} \\ g_{21} & -h_{12} \end{vmatrix} = -\frac{g_{11}}{g} h_{12} + \frac{g_{21}}{g} h_{11}$$

$= -h_{12} g^{22} - h_{11} g^{12} = -h_{1\alpha} g^{\alpha 2}$

次に $\mathbf{N}_2$ を求める。$\mathbf{N}_2$ も $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ で張られているから、

$$\mathbf{N}_2 = \Lambda_2^1 \mathbf{x}_1 + \Lambda_2^2 \mathbf{x}_2$$

とおける。

$\mathbf{x}_1$ をかける。$\mathbf{x}_1 \mathbf{N}_2 = -h_{21}$ であるから、

$$-h_{21} = \Lambda_2^1 g_{11} + \Lambda_2^2 g_{12}$$

$\mathbf{x}_2$ をかける。$\mathbf{x}_2 \mathbf{N}_2 = -h_{22}$ であるから、

$$-h_{22} = \Lambda_2^1 g_{12} + \Lambda_2^2 g_{22}$$

$$\Lambda_2^1 = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} -h_{21} & g_{12} \\ -h_{22} & g_{22} \end{vmatrix} = -\frac{g_{22}}{g} h_{21} + \frac{g_{12}}{g} h_{22}$$

$= -h_{21} g^{11} - h_{22} g^{21} = -h_{2\alpha} g^{\alpha 1}$

$$\Lambda_2^2 = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} g_{11} & -h_{21} \\ g_{21} & -h_{22} \end{vmatrix} = -\frac{g_{11}}{g} h_{22} + \frac{g_{21}}{g} h_{21}$$

$= -h_{22}g^{22} - h_1 g^{12} = -h_{2\alpha}g^{\alpha 2}$　　（証明終）

定義　$S:\ \mathbf{X} = \mathbf{X}(u,v)$　曲面

$D:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u(s), v(s))$　　S 上の曲線

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \mathbf{x}_1 u' + \mathbf{x}_2 v'$$

$\mathbf{u}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$$

（$\mathbf{u}$ は、曲面 S の接平面上にある。）

さて、$\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}$ であることはフルネー・セレーの定理でやったが、（この $\mathbf{n}$ は曲線の接触平面内にある。つまり、もとの曲面 S とは無関係。）この $\kappa\mathbf{n}$ の、$\mathbf{u}$ への正射影の長さを、「測地的曲率」といい、κ_g と書く。

即ち、

$$\kappa_g = \left|\kappa\mathbf{n}\right| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = \kappa\ (\mathbf{u}, \mathbf{n}) = (\mathbf{u}, \kappa\mathbf{n}) = \left(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{t}}{ds}\right)$$

問　まづ $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ を計算し、次に $\mathbf{u} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ との内積を作り、κ_g を $g_{\alpha\beta}$ で表せ。

解　$\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{x}_1}{ds}u' + \mathbf{x}_1\dfrac{du'}{ds} + \dfrac{d\mathbf{x}_2}{ds}v' + \mathbf{x}_2\dfrac{dv'}{ds}$

$= \dfrac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial u}\dfrac{du}{ds}u' + \dfrac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial v}\dfrac{dv}{ds}u' + \mathbf{x}_1 u" + \dfrac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial u}\dfrac{du}{ds}v' + \dfrac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial v}\dfrac{dv}{ds}v' + \mathbf{x}_2 v"$

$= \mathbf{x}_{11}(u')^2 + \mathbf{x}_{12}u'v' + \mathbf{x}_1 u" + \mathbf{x}_{21}u'v' + \mathbf{x}_{22}(v')^2 + \mathbf{x}_2 v"$

$= \mathbf{x}_{11}(u')^2 + 2\mathbf{x}_{12}u'v' + \mathbf{x}_{22}(v')^2 + \mathbf{x}_1 u" + \mathbf{x}_2 v"$

$= \left(\left\{{1 \atop 11}\right\}\mathbf{x}_1 + \left\{{2 \atop 11}\right\}\mathbf{x}_2 + h_{11}\mathbf{N}\right)(u')^2 + 2\left(\left\{{1 \atop 12}\right\}\mathbf{x}_1 + \left\{{2 \atop 12}\right\}\mathbf{x}_2 + h_{12}\mathbf{N}\right)u'v'$

$+ \left(\left\{{1 \atop 22}\right\}\mathbf{x}_1 + \left\{{2 \atop 22}\right\}\mathbf{x}_2 + h_{22}\mathbf{N}\right)(v')^2 + \mathbf{x}_1 u" + \mathbf{x}_2 v"$

$= \left(\left\{{1 \atop 11}\right\}(u')^2 + 2\left\{{1 \atop 12}\right\}u'v' + \left\{{1 \atop 22}\right\}(v')^2 + u"\right)\mathbf{x}_1$

$+ \left(\left\{{2 \atop 11}\right\}(u')^2 + 2\left\{{2 \atop 12}\right\}u'v' + \left\{{2 \atop 22}\right\}(v')^2 + v"\right)\mathbf{x}_2$

$+ \left(h_{11}(u')^2 + 2h_{12}u'v' + h_{22}(v')^2\right)\mathbf{N}$

ここで $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ と $(\mathbf{N}\times\mathbf{t})$ との内積を計算する。

$(\mathbf{N}\times\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1=0,\ (\mathbf{N}\times\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2=0,\ (\mathbf{N}\times\mathbf{x}_1)\mathbf{N}=0,\ (\mathbf{N}\times\mathbf{x}_2)\mathbf{N}=0$

に注意して、

$\kappa_g=(\mathbf{N}\times\mathbf{t})\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}=[\mathbf{N}\times(\mathbf{x}_1u'+\mathbf{x}_2v')]\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$

$=(\mathbf{N}\times\mathbf{x}_1)u'\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}+(\mathbf{N}\times\mathbf{x}_2)v'\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$

$=(\mathbf{N}\times\mathbf{x}_1)u'\left(\left\{{2 \atop 11}\right\}(u')^2+2\left\{{2 \atop 12}\right\}u'v'+\left\{{2 \atop 22}\right\}(v')^2+v''\right)\mathbf{x}_2$

$+(\mathbf{N}\times\mathbf{x}_2)v'\left(\left\{{1 \atop 11}\right\}(u')^2+2\left\{{1 \atop 12}\right\}u'v'+\left\{{1 \atop 22}\right\}(v')^2+u''\right)\mathbf{x}_1$

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\ \ (\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{b}=-\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ に注意して、

$=\mathbf{N}(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)u'\left(\left\{{2 \atop 11}\right\}(u')^2+2\left\{{2 \atop 12}\right\}u'v'+\left\{{2 \atop 22}\right\}(v')^2+v''\right)$

$-\mathbf{N}(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)v'\left(\left\{{1 \atop 11}\right\}(u')^2+2\left\{{1 \atop 12}\right\}u'v'+\left\{{1 \atop 22}\right\}(v')^2+u''\right)$

$\mathbf{N}=\dfrac{\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2}{\sqrt{g}},\quad (\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)=g$ に注意して、

$$=\sqrt{g}\begin{vmatrix} u', & \left(\left\{{1 \atop 11}\right\}(u')^2+2\left\{{1 \atop 12}\right\}u'v'+\left\{{1 \atop 22}\right\}(v')^2+u''\right) \\ v', & \left(\left\{{2 \atop 11}\right\}(u')^2+2\left\{{2 \atop 12}\right\}u'v'+\left\{{2 \atop 22}\right\}(v')^2+v''\right)\end{vmatrix}$$

（解終り）

注意　$u=u^1,\ v=u^2$ と書き、アインシュタインの約束を用いれば、綺麗に次のように書ける。

$$\kappa_g=\sqrt{g}\begin{vmatrix}(u^1)', & \left\{{1 \atop \alpha\beta}\right\}(u^\alpha)'(u^\beta)'+(u^1)'' \\ (u^2)', & \left\{{2 \atop \alpha\beta}\right\}(u^\alpha)'(u^\beta)'+(u^2)''\end{vmatrix}$$

定義

$$\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}(u^\alpha)'(u^\beta)'+(u^\gamma)''=0\quad(\gamma=1,\ 2)$$

を測地線の方程式と言い、曲面上でこの方程式を満たす曲線を測地線という。

問　$W=\left\{(u,v); 0\leqq v\leqq 2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}\right\}$

と半径 a の球とは、

$x_1 = a\cos u\cos v,\ x_2 = a\cos u\sin v,\ x_3 = a\sin u$

で対応している。

W における測地線を求めよ。

解　$\mathbf{x} = (a\cos u\cos v,\ x_2 = a\cos u\sin v,\ x_3 = a\sin u)$

$u = u^1,\ v = u^2$ とおいて

$\mathbf{x}_1 = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u)$

$\mathbf{x}_2 = (-a\cos u\sin v, -a\cos u\cos v, 0)$

$g_{11} = a^2\sin^2 u\cos^2 v + a^2\sin^2 u\sin^2 v + a^2\cos^2 u = a^2$

$g_{12} = a^2\sin u\cos u\sin v\cos v - a^2\sin u\cos u\sin v\cos v = 0$

$g_{22} = a^2\cos^2 u\sin^2 v + a^2\cos^2 u\cos^2 v = a^2\cos^2 u$

$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = a^4\cos^2 u$

$g^{11} = \dfrac{g_{22}}{g} = \dfrac{1}{a^2},\quad g^{12} = 0,\quad g^{22} = \dfrac{1}{a^2\cos^2 u}$

$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = g^{11}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right) + g^{12}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right)$

$= \dfrac{1}{a^2}\dfrac{1}{2}\times 0 + 0\times\dfrac{1}{2}\times(...) = 0$

$\left\{ {1 \atop 12} \right\} = g^{11}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right) + g^{12}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right)$

$= \dfrac{1}{a^2}\dfrac{1}{2}\times 0 + 0 = 0$

$\left\{ {1 \atop 21} \right\} = 0$

$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = g^{11}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right) + g^{12}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right)$

$= \dfrac{1}{a^2}\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{\partial(a^2\cos^2 u)}{\partial u}\right) + 0 = \sin u\cos u$

$\left\{ {2 \atop 11} \right\} = g^{21}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right) + g^{22}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)$

$= 0$

$\left\{ {2 \atop 12} \right\} = g^{21}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right) + g^{22}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right)$

$= \dfrac{1}{a^2\cos^2 u} \times \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial(a^2\cos^2 u)}{\partial u} = -\dfrac{\sin u}{\cos u}$

$\left\{ {2 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 12} \right\} = -\dfrac{\sin u}{\cos u}$

$\left\{ {2 \atop 22} \right\} = g^{21}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right) + g^{22}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right)$

$= g^{22}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial(a^2\cos^2 u)}{\partial v} = 0$

これらを測地線の方程式

$$(u^\gamma)" + \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}(u^\alpha)'(u^\beta)' = 0 \quad (\gamma = 1,\ 2)$$

に代入。

$\gamma = 1$ のとき、

$\dfrac{d^2u}{ds^2} + \left\{ {1 \atop 11} \right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{du}{ds} + 2\left\{ {1 \atop 12} \right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{ {1 \atop 22} \right\}\dfrac{dv}{ds}\dfrac{dv}{ds} = 0$

$\therefore \quad \dfrac{d^2u}{ds^2} + \sin u\cos u\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \quad \ldots \quad (1)$

$\gamma = 2$ のとき、

$\dfrac{d^2v}{ds^2} + \left\{ {2 \atop 11} \right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{du}{ds} + 2\left\{ {2 \atop 12} \right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{ {2 \atop 22} \right\}\dfrac{dv}{ds}\dfrac{dv}{ds} = 0$

$\therefore \quad \dfrac{d^2v}{ds^2} - 2\dfrac{\sin u}{\cos u}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} = 0 \quad \ldots \quad (2)$

(2) から

$\dfrac{\frac{d^2v}{ds^2}}{\frac{dv}{ds}} = 2\dfrac{\sin u}{\cos u}\dfrac{du}{ds}$

$\therefore \quad \log\dfrac{dv}{ds} = -2\log\cos u + \log c$

$\therefore \quad \dfrac{dv}{ds} = \dfrac{c}{\cos^2 u}$

２乗して、また $ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22} = a^2du^2 + a^2\cos^2 udv^2$ に気をつけて、

$$dv^2 = \frac{c^2}{\cos^4 u}(a^2du^2 + a^2\cos^2 udv^2)$$

$$\therefore \quad \cos^4 udv^2 = a^2c^2du^2 + a^2c^2\cos^2 udv^2$$

$$dv^2(\cos^4 u - a^2c^2\cos^2 u) = a^2c^2du^2$$

$$dv = \frac{ac}{\cos u\sqrt{\cos^2 u - a^2c^2}}du = \frac{1}{\cos u\sqrt{\frac{1}{a^2c^2}\cos^2 - 1}}du$$

この不定積分を求めるために、次の計算をする。

$$\frac{d}{dx}[\sin^{-1}(k\tan x)] = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\tan^2 x}}\frac{k}{\cos^2 x} = \frac{k}{\cos x\sqrt{\cos^2 x - k^2\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\cos x\sqrt{(\frac{1+k^2}{k^2})\cos^2 x - 1}}$$

故に、$\dfrac{1+k^2}{k^2} = \dfrac{1}{a^2c^2}$ とおいて、k を求めれば、$k = \dfrac{ac}{\sqrt{1-a^2c^2}}$

となるから、上の不定積分は、

$$v = \sin^{-1}\left(\frac{ac}{\sqrt{1-a^2c^2}}\tan u\right) + c$$

となる。

$$\therefore \quad \sin(v - D) = \frac{ac}{\sqrt{1-a^2c^2}}\tan u$$

ここで、 $\dfrac{ac}{\sqrt{1-a^2c^2}} = l$ とおけば、

$$u = \tan^{-1}(l\sin(v-D)) \quad .....(3)$$

（解おわり）

問　上の測地線は、大円になることを示せ。

解　大円の方程式を u, v で表してみる。大円は、円の中心を通る平面と円との交線だから、連立方程式

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

$x_1 = a\cos u \cos v$

$x_2 = a\cos u \sin v$

$x_3 = a\sin u$

を解けばよい。

$$a_1 \cos u \cos v + a_2 \cos u \sin v + a_3 \sin u = 0$$

$$\cos u(a_1 \cos v + a_2 \sin v) = -a_3 \sin u$$

$$-a_3 \tan u = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\left(\sin v \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \cos v \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right) = k\sin(v - D)$$

$$\therefore \quad \tan u = l\sin(v - D) \quad .....(4)$$

これにより、円上の測地線は大円に対応していることが分る。

問　前問の結果を用いて、

二点 $P_1 = (0, \frac{\pi}{4}),\ P_2 = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

の最短距離を求めよ。

解　$P_1,\ P_2$ を前問で求めた大円の式 $\tan u = l\sin(v - D)$ に代入。

$$1 = l\sin(-D) \quad .....(5)$$

$$1 = l\sin(\frac{\pi}{4} - D) \quad .....(6)$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - D) + \sin D = 0$$

$$2\sin\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - D + D)\cos\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - 2D) = 0$$

$$\therefore \quad \cos(\frac{\pi}{8} - D) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{8} - D = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$D = \frac{5\pi}{8} + 2n\pi \quad or \quad -\frac{3\pi}{8} + 2n\pi$$

$\therefore \quad D = -\dfrac{3\pi}{8} \quad .....(7)$

最初の式に代入して l を求める。

$$1 = l \sin \frac{3\pi}{8}$$

$$l = \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{8}} \quad .....(8)$$

(7) (8) を (3) に代入。

$$u = \tan^{-1}\left\{ \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{8}} \sin(v + \frac{3\pi}{8}) \right\} \qquad \text{（解終り）}$$

問　上の問の P_1 と P_2 間の「直線距離」と「大円距離」の比較をせよ。

解　直線距離 $P_1P_2 = a \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{du^2 + \cos^2 u dv^2}\, dv$

$$= a \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{2}}\, dv = a\frac{\sqrt{2}\pi}{8} = a \times 0.55536...$$

大円距離は、実際に球の大円の方で求める。

$P_1\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ の、球における位置は $P_1'\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$P_2\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ の、球における位置は $P_2'\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$

大円距離は、$a\times < P_1'OP_2'$ $(radian)$ だから、$\cos(< P_1'OP_2')$ を求める。

$$\cos(< P_1'OP_2') = (OP_1'\ OP_2')/a^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

即ち、大円距離 $= a \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}\right) = a \times 0.5480...$

確かに、直線距離より短い。　　（解終り）

問　上半平面に、計量

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

がはいっているとき、測地線を求めよ。

解　$g_{11} = \dfrac{1}{y^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \dfrac{1}{y^2}$

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \frac{1}{y^4}, \qquad g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = y^2 \quad g^{12} = g^{21} = 0$$

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = g^{11}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right) + g^{12}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)$$

$$= y^2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y^2}{\partial x}\right) = 0$$

$$\left\{ {1 \atop 12} \right\} = g^{11}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right) + g^{12}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right)$$

$$= y^2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = -\frac{1}{y}$$

$$\left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = -\frac{1}{y}$$

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = g^{11}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right) + g^{12}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right)$$

$$= y^2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = 0$$

$$\left\{ {2 \atop 11} \right\} = g^{21}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right) + g^{22}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)$$

$$= y^2\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = \frac{1}{y}$$

$$\left\{ {2 \atop 12} \right\} = g^{21}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right) + g^{22}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right)$$

$$= y^2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = 0$$

$$\left\{ {2 \atop 22} \right\} = g^{21}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right) + g^{22}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right)$$

$$= y^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^2} \right) \right) = -\frac{1}{y}$$

これらを測地線の方程式

$$(u^\gamma)" + \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} (u^\alpha)'(u^\beta)' = 0 \quad (\gamma = 1,\ 2)$$

に代入。

$\gamma = 1$ のとき、

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \left\{ {1 \atop 11} \right\} \frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + 2\left\{ {1 \atop 12} \right\} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{ {1 \atop 22} \right\} \frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} = 0 \qquad .... \ (9)$$

$\gamma = 2$ のとき、

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left\{ {2 \atop 11} \right\} \frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + 2\left\{ {2 \atop 12} \right\} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{ {2 \atop 22} \right\} \frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0 \qquad .... \ (10)$$

(9) から、

$$\frac{d^2x/ds^2}{dx/ds} - \frac{2}{y}\frac{dy}{ds} = 0$$

$$\log\frac{dx}{ds} - 2\log y = \log c$$

$$\frac{dx}{ds} = cy^2$$

$$dx = cy^2 ds$$

$$dx^2 = c^2y^4ds^2 = c^2y^4\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 = c^2y^2(dx^2 + dy^2)$$

$$(1 - c^2y^2)dx^2 = c^2y^2dy^2$$

$$dx = \pm\frac{cy}{\sqrt{1 - c^2y^2}}dy$$

$$x = \pm\frac{1}{c}\sqrt{1-c^2y^2} + D$$

$$c(x-D) = \pm\sqrt{1-c^2y^2}$$

$$c^2(x-D)^2 = 1-c^2y^2$$

$$(x-D)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

これは、x 軸上に中心のある円。即ちこの場合は、その上半分。（解終り）

問　上の解がもう一方の測地線の方程式（10）もみたすことを示せ。

解　$x - D = \dfrac{1}{c}\cos\theta,\quad y = \dfrac{1}{c}\sin\theta$

$$dx = -\frac{1}{c}\sin\theta d\theta,\quad dy = \frac{1}{c}\cos\theta d\theta$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{1}{c^2}d\theta^2$$

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} = \frac{d\theta^2}{sin^2\theta}$$

$$\therefore\quad \frac{d\theta}{ds} = \sin\theta$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{c}\sin^2\theta$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{c}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2c}\sin 2\theta$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{ds}\right)\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{c}\cos 2\theta\sin\theta$$

さて、これらを (10) の左辺に代入して 0 になるかどうかを調べる。

$$(10)\ \text{の左辺} = \frac{1}{c}\cos 2\theta\sin\theta + \frac{c}{\sin\theta}\frac{1}{c^2}\sin^4\theta - \frac{c}{\sin\theta}\frac{1}{c^2}\cos^2\theta\sin^2\theta = 0$$

（解終り）