§1　曲線の表し方

定義　$\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0) \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$　とし、

$\mathbf{x} = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$

が C^r 級の曲線である、とは、次の三つの条件を満たすことを言う。

1)　区間 $a \leq t \leq b$ において一価で連続な関数。

2)　区間 $a \leq t \leq b$ において r 次の導関数を持ち、これらがすべて連続。

3)　区間 $a \leq t \leq b$ において $\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}$ が同時には 0 にならない。

定義　おわり。

例１　$\mathbf{x}(t) = a\cos t\ \mathbf{e}_1 + a\sin t\ \mathbf{e}_2 + bt\ \mathbf{e}_3$

これはつる巻曲線。

例２　$\mathbf{x}(t) = a(t - \sin t)\ \mathbf{e}_1 + a(1 - \cos t)\ \mathbf{e}_2$

これはサイクロイド。(平面曲線)

例３　$t \leq 0$　のとき

$\mathbf{x}(t) = t^2\ \mathbf{e}_1 + t\ \mathbf{e}_2$

$0 \leq t$　のとき

$\mathbf{x}(t) = t\ \mathbf{e}_2 + t^2\ \mathbf{e}_3$

これは上の曲線の条件を満たしている。また、平面曲線ではない。

定理２ー１

曲線 $\mathbf{x}(t)$ が平面曲線ならば、

$$\left| \frac{d}{dt}\mathbf{x}, \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}, \frac{d^3}{dt^3}\mathbf{x} \right| = 0$$

(この逆が成立すれば、判定するのに楽なのだが、これは成立たない。反例が上の例３。)

証明

$\mathbf{x}(t)$ が、平面 $\mathbf{ax}=\mathbf{b}$ 上にあるとすると、

$$\mathbf{ax}(t)=\mathbf{b} \quad (\forall t)$$

$$\therefore \quad \mathbf{a}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0} \quad (\forall t)$$

$$\therefore \quad \mathbf{a}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0} \quad (\forall t)$$

$$\therefore \quad \mathbf{a}\frac{d^3}{dt^3}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0} \quad (\forall t)$$

$\mathbf{a}$ は勿論 $\mathbf{0}$ ではないから、消去法の原理により、

$$\left|\frac{d}{dt}\mathbf{x}, \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}, \frac{d^3}{dt^3}\mathbf{x}\right|=0$$

証明終り

§ 2　曲線の接線、接触平面

定義　曲線 $C:\ \mathbf{x}=\mathbf{x}(t) \quad (a \le t \le b)$

C 上の点 P, その点を与える $t=t_1$ のとき、

「P における接線ベクトル」とは、

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{dx_1}{dt}\dot{\mathbf{e_1}}+\frac{dx_2}{dt}\dot{\mathbf{e_2}}+\frac{dx_3}{dt}\dot{\mathbf{e_3}}=\left.\left(\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dt},\ \frac{dx_3}{dt}\right)\right|_{t=t_1}$$

を言う。

命題　前定義の条件が与えられているとき、

点 P における接線の方程式は、

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_1)+r\dot{\mathbf{x}}(t_1)$$

定義　曲線 $C:\ \mathbf{x}=\mathbf{x}(t) \quad (a \le t \le b)$

C 上の点 P, その点を与える $t=t_1$ のとき、

「P における C の法平面」とは、

「P における接線に垂直な平面」をいう。

命題　前定義の条件が与えられているとき、

法平面の方程式は、

$\dot{\mathbf{x}}_1 \{\mathbf{X} - \mathbf{x}(t_1)\} = 0$

問　常螺旋　$x_1 = a\cos t, x_2 = a\sin t, x_3 = bt \quad (a > 0, b > 0)$

の、点 $P(t_0)$ における接線ベクトルを求めよ。また、

点 $P(t_0)$ における法平面の方程式を求めよ。

解　$(x_1', x_2', x_3')|_{t=t_0} = (-a\sin t_0, a\cos t_0, b)$

故に接線の方程式は、点 $(a\cos t_0, a\sin t_0, bt_0)$ を通って、

傾き $(-a\sin t_0, a\cos t_0, b)$ なる直線。即ち、

$(x_1, x_2, x_3) = (a\cos t_0 - ar\sin t_0, a\sin t_0 + ar\cos t_0, bt_0 + rb)$

または、

$$\frac{x_1 - a\cos t_0}{-a\sin t_0} = \frac{x_2 - a\sin t_0}{a\cos t_0} = \frac{x_3 - bt_0}{b}$$

法平面は、点 $(a\cos t_0, a\sin t_0, bt_0)$ を通って、

$(-a\sin t_0, a\cos t_0, b)$ に垂直な平面。即ち、

$(-a\sin t_0, a\cos t_0, b)\left((x_1, x_2, x_3) - (a\cos t_0, a\sin t_0, bt_0)\right) = 0$

または、

$$-a\sin t_0(x_1 - a\cos t_0) + a\cos t_0(x_2 - a\sin t_0) + b(x_3 - bt) = 0$$

（解終り）

接触平面

定義　曲線　$C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ が与えられているとき

C 上の点 $\mathbf{x}(t_0)$ における接触平面 $(osculatingplane)$ とは、

「$\mathbf{x}(t_0)$ の近くの二点 $\mathbf{x}(t_0 + h)$, $\mathbf{x}(t_0 + k)$ をとり、これら三点を通る

平面の、h と k をともに 0 に収束させたときの極限の平面」をいう。

命題　前定義の条件が与えられているとき、

　　接触平面の方程式は、(接触平面があるときは)

　　$|\mathbf{x}-\mathbf{x}(t_0),\dot{\mathbf{x}}(t_0),\ddot{\mathbf{x}}(t_0)|=0$

となる。

証明

$\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{x}(t_0+h),\ \mathbf{x}(t_0+k)$

を通る平面上の任意の点を $\mathbf{X}$ とすれば、三つのベクトル

$\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{x}(t_0+h)-\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{x}(t_0+k)-\mathbf{x}(t_0)$

は一次従属。

$\therefore\quad |\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{x}(t_0+h)-\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{x}(t_0+k)-\mathbf{x}(t_0)|=0$

平均値の定理により、

$\mathbf{x}(t_0+h)-\mathbf{x}(t_0)=h\dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta h)\quad(0\leq\theta_1\leq 1)$

$\mathbf{x}(t_0+k)-\mathbf{x}(t_0)=k\dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta k)\quad(0\leq\theta_2\leq 1)$

これを代入して $h,\ k$ で両辺を割ると、

　$|\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_0),\ \dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta_1 h),\ \dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta_2 k)|=0$

$\therefore\quad |\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_0),\ \dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta_1 h),\ \dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta_2 k)-\dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta_1 h)|=0$

再び平均値の定理により、

$\dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta_2 k)-\dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta_1 h)=(\theta_2 k-\theta_1 h)\ddot{\mathbf{x}}(t_0+h')\ \ (\theta_1 h\lesseqgtr h'\lesseqgtr\theta_2 k)$

$\therefore\quad |\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_0),\ \dot{\mathbf{x}}(t_0+\theta_1 h),\ \ddot{\mathbf{x}}(t_0+h')|=0$

$h,\ k\longrightarrow 0$　とすれば、$\theta_1 h\longrightarrow 0,\ \ h'\longrightarrow 0$ より

$|\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_0),\ \dot{\mathbf{x}}(t_0),\ \ddot{\mathbf{x}}(t_0)|=0$

これが平面の方程式になっていれば、これが求めるもの。

なっていなければ、点 $\mathbf{x}(t_0)$ で接触平面は定義されない。

注意　接触平面は曲線上の非常に近い３点を通る平面の

　極限であるから、接触平面と曲線とは「一致した３点

　を共存する」という。

　同様に、曲線と接線は「一致した２点を共存する」という。

注意　接触平面は二つのベクトル $\mathbf{x}(\dot{t_0})$ と $\mathbf{x}(\ddot{t_0})$ を含む。

即ち、$\dot{\mathbf{x}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{x}}(t_0)$ は接触平面の法線ベクトルである。

注意　任意の t に対して $\mathbf{x}(\dot{t}) \times \mathbf{x}(\ddot{t}) = 0$ ならば、その曲線は直線。

(これはすみ。)

また、t_0 で $\dot{\mathbf{x}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{x}}(t_0) = 0$ ならば、

その曲線は、$\mathbf{x}(t_0)$ で接触平面をもたない。

定義　$C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ 曲線、と、その上の点 P が与えられているとき、

１　点 P における接触平面と法平面との交わりを、主法線

$(principalnormal)$ という。

２　点 P を通り接触平面に垂直な直線を従法線（$binormal$）

という。

３　点 P における接線と従法線の定める平面を

展直平面（$rectifyingplane$）という。

命題

１　従法線の方程式は、r をパラメターとして、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + r\,[\dot{\mathbf{x}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{x}}(t_0)]$$

２　主法線の方程式は、r をパラメターとして、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + r\left[(\dot{\mathbf{x}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{x}}(t_0)) \times \dot{\mathbf{x}}(t_0)\right]$$

３　展直平面の方程式は、

$[(\dot{\mathbf{x}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{x}}(t_0)) \times \dot{\mathbf{x}}(t_0)]\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) = 0$

証明

前命題の注意から、接触平面の法線ベクトルは

$\dot{\mathbf{x}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{x}}(t_0)$ であるから、従法線ベクトルは $\dot{\mathbf{x}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{x}}(t_0)$

以下は自明。

証明終り

§３　曲線の長さ

命題　曲線 $C:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)\quad (a \leq t \leq b)$ が与えられているとき、その長さ s は、

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t)\dot{\mathbf{x}}(t)}dt$$

証明

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$

のように分割し、

パラメター t の値に対応する C 上の点を、

$A = P_0, P_1, P_2, \cdots, p_n = B$

とする。

折線 $P_0, P_1, \cdots P_n$ の長さは、

$|P_0P_1| + |P_1P_2| + \cdots + |P_{n-1}P_n|$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})|$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\{\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\}\{\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\}}$$

t_k と t_{k-1} の間に ξ_k なる値があって、

$\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1}) = \dot{\mathbf{x}}(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$

と出来るから（平均値の定理)、

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(\xi_k) \cdot \dot{\mathbf{x}}(\xi_k)}\ \ (t_k - t_{k-1}).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(\xi_k) \cdot \dot{\mathbf{x}}(\xi_k)}\ \ (t_k - t_{k-1}) = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t)\ \dot{\mathbf{x}}(t)}dt$$

証明終り

定義　曲線 $C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)\ \ a \leq t \leq b$

　が与えられているとき、パラメター t が a から t まで増すときの

弧の長さ $s(t)$ とは、

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{x}}\ \dot{\mathbf{x}}}dt$$

をいう。

また、線素（$linearelement$）ds とは

$$ds = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}\ \dot{\mathbf{x}}}dt$$

$$\therefore \quad (ds)^2 = (\dot{\mathbf{x}}\ \dot{\mathbf{x}})(dt)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$$

この ds を曲線 C の線素（$linearelement$）という。

命題　C: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

　t を s の関数と考えて、$\mathbf{x}$ を s で

微分した導関数を $\mathbf{x}'$ と書くと

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = 1$$

証明

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x}'\mathbf{x}' = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}}\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}} = 1$$

証明終り

注意　即ち $\mathbf{x}'$ は単位ベクトル

　　これを単位接線ベクトル（$unittangentvector$）という。

例 1　常螺旋 $x_1 = a\cos t, x_2 = a\sin t, x_3 = bt \quad (a \geq 0, b \geq 0)$

の $t = 0$ から $t\ (\geq 0)$ までの弧の長さ s を求めよ。

また、s に対応する点における単位接線ベクトルを求めよ。

解）　$\dot{\mathbf{x}} = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$$\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = (-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \quad s = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,t$$

$$\therefore \quad t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

故に、もとの曲線の方程式を s で表せば、

$$x_1 = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad x_2 = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad x_3 = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{t} = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

フルネ（$Frenet$）標構

命題　$C:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ が与えられているとき、

　ここで $\mathbf{x}''$ を作れば、これは次のことを満たす

1) $\mathbf{x}' \perp \mathbf{x}''$

2) $\mathbf{x}''$ は主法線ベクトル

証明

1) $\mathbf{x}'\mathbf{x}' = 1$

両辺を s で微分して、

$\mathbf{x}''\mathbf{x}' + \mathbf{x}'\mathbf{x}'' = 0$

$\therefore \quad \mathbf{x}''\mathbf{x}' = 0$

$\therefore \quad \mathbf{x}' \perp \mathbf{x}''$

2) まず 1) の結果から、$\mathbf{x}''$ が法平面内にある。

あとは、$\mathbf{x}''$ が接触平面内にあることを言えばよい。

接触平面の方程式は

$$|\mathbf{X} - \mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}}| = 0$$

ここでパラメターは何であってもよい。パラメターを s にとって

$$|\mathbf{X} - \mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ \mathbf{x}''| = 0$$

即ち、$\mathbf{x}''$ は接触平面内にある。

証明終り

定義　$\mathbf{x}''$ の長さを曲率といい、κ と書く。

即ち

$$\kappa = \sqrt{\mathbf{x}''\mathbf{x}''}$$

定義　長さが 1 の主法線ベクトルを、単位主法線ベクトルといい $\mathbf{n}$ と書く。

即ち、

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}''}{\kappa}$$

定義　長さが 1 の従法線ベクトル（主法線ベクトルと接線ベクトルの両方に垂直なベクトル）を、単位従法線ベクトルといい $\mathbf{b}$ と書く。

即ち、

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

定義　曲線 $C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$

のフルネ標構とは、直交座標系

$\{\mathbf{x}(s); \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$

をいう。

定義終り

§4　フルネ・セレの公式

命題　($Frenet - Serret$ の公式)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{t} \quad .....(1)$$

$$\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n} \quad .....(2)$$

$$\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \quad ...(3)$$

$$\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} \quad ...(4)$$

但し、κ は既に定義したもの。また、τ は、$|\tau| = |\mathbf{b}'|$。

ここで、τ 自体は符号を持っている。

証明　$\mathbf{x}' = \mathbf{t},\ \mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$ は定義から。

次に (4) を示す。

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

$\therefore \quad \mathbf{b}' = \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' = \kappa\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' = \mathbf{t} \times \mathbf{n}'$

$\therefore \quad \mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}') \cdot \mathbf{t} = |\mathbf{t},\ \mathbf{n}',\ \mathbf{t}| = 0$

$\therefore \quad \mathbf{b}' \perp \mathbf{t}$

かつ、$\mathbf{b}' \perp \mathbf{b}$ $\quad (\because \quad |\mathbf{b}| = 1)$

$\therefore \quad \mathbf{b}' \parallel \mathbf{n}$

$|\mathbf{b}'| = |\tau|, \quad |\mathbf{n}| = 1,$ より、

$$\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$$

と書ける。

（$\mathbf{b}',\ \mathbf{n},\ \tau$ を計算し、符号をあわせればよい。）

次に (3) を示す。

まづ、$\mathbf{n} \perp \mathbf{n}'$ $\quad (\because |\mathbf{n}| = 1)$

従って、$\mathbf{n}'$ は、$\mathbf{t}$ と $\mathbf{b}$ の一次結合。即ち、

$$\mathbf{n}' = p\mathbf{t} + q\mathbf{b}$$

と書ける。$\mathbf{t}$ をかけて、

$$\mathbf{n}'\mathbf{t} = p\mathbf{t}\mathbf{t} + q\mathbf{b}\mathbf{t}$$

$\therefore \quad p = \mathbf{n}'\mathbf{t} = -\mathbf{n}\mathbf{t}' \quad (\because \quad \mathbf{n}\mathbf{t} = 0)$

$\qquad = -\mathbf{n}\kappa\mathbf{n} = -\kappa$

また $\mathbf{b}$ をかけて、

$$\mathbf{n}'\mathbf{b} = q\mathbf{b}\mathbf{b}$$

$\therefore \quad q = \mathbf{n}'\mathbf{b} = -\mathbf{n}\mathbf{b}' = -\mathbf{n}(-\tau\mathbf{n}) = \tau$

$\therefore \quad \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \qquad\qquad QED$

§ 5　曲率と捻率（れいりつ）

命題　曲率 κ は、「接線の方向 θ の、弧長 s に対する変化率」である。

証明

原点を中心とする半径 1 の球面上に長さ 1 のベクトル $\mathbf{t}(s)$ の軌跡を作る。

弧長 s をパラメターとする曲線が出来る。これを Γ とする。

$$\Gamma : \mathbf{y} = \mathbf{t}(s)$$

Γ の線素を $d\sigma$ とすると

$$d\sigma^2 = d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y} = d\mathbf{t} \cdot d\mathbf{t} = (\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t}')ds^2 = (\kappa\mathbf{n} \cdot \kappa\mathbf{n})ds^2 = \kappa^2 ds^2$$

$$\therefore \quad \left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = |\kappa|$$

　球面の半径は 1 であるから、

$$\lim_{\triangle s \to 0} \left|\frac{\triangle\theta}{\triangle\sigma}\right| = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{\triangle s \to 0} \left|\frac{\triangle\theta}{\triangle s}\right| = \lim_{\triangle s \to 0} \left|\frac{\triangle\sigma}{\triangle s}\right| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = |\kappa| = \kappa \quad (\because \quad \kappa > 0)$$

即ち　$\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right| = \kappa.$　　（証明終）

定義　$\kappa(s) > 0$ のとき、（つまり $\neq 0$ のとき）

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

と定義し、$\rho(s)$ を、「曲線 C の、点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ における曲率半径」という。

曲率半径の幾何学的な意味

命題　曲線上の一致した 3 点を通る円は、その点における

　曲線の接触平面内にあって、その中心 $\mathbf{a}$ は、

　その点の法線方向に $\rho(s)$ 行ったところ、即ち、

$\mathbf{a} = \mathbf{x}(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s)$

にあり、半径は $\rho(s)$ である。

証明　$C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$

3 点 $\mathbf{x}(s),\ \mathbf{x}(s_1),\ \mathbf{x}(s_2)$ を通る円の方程式を、

$(\mathbf{x} - \mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = r^2 \quad .... \ (1)$

とおく。($s_1,\ s_2 \longrightarrow s$ としたときの $\mathbf{a},\ r$ を求めればよい。)

$f(s) = (\mathbf{x} - \mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - r^2$

とおくと、

$\mathbf{x}(s),\ \mathbf{x}(s_1),\ \mathbf{x}(s_2)$ はこの円上にあるから、

$f(s) = f(s_1) = f(s_2) = 0$

故に *Rolle* により、

$f'(s_3) = f'(s_4) = 0$

ならしめる s_3 が s と s_1 の間に、また、s_4 が s_1 と s_2 の間に存在する。

更に *Rolle* により、

$f”(s_5) = 0$

ならしめる s_5 が s_3 と s_4 の間に存在する。

s_1 と s_2 が s に近づくとき、$s_3,\ s_4,\ s_5$ はいづれも s に近づくから、

$f(s) = f'(s) = f”(s) = 0$

$f(s)$ を s で微分して、

$f'(s) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{a})\mathbf{x}'$

これが 0 だから、

$\mathbf{x}'(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$

$\therefore \quad \mathbf{t}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$

$\therefore \quad \mathbf{t} \perp (\mathbf{x} - \mathbf{a})$

次に、$f'(s)$ を s で微分して、

$\mathbf{x}''(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \mathbf{x}'\mathbf{x}' = 0$

$\therefore \quad \kappa\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + 1 = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$

円の作り方から、この円が接触平面内にあることは自明。

$\therefore \quad (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \parallel \mathbf{n}$

故に、

$\mathbf{x} - \mathbf{a} = -\lambda\mathbf{n}$

とおける。

これを上の (2) に代入して、

$\kappa\mathbf{n}(-\lambda\mathbf{n}) + 1 = 0$

$\therefore \quad -\kappa\lambda + 1 = 0$

$\therefore \quad \lambda = \dfrac{1}{\kappa} = \rho$

即ち、

$\mathbf{x} - \mathbf{a} = -\rho\mathbf{n}$

これを (1) に代入して、

$(-\rho\mathbf{n})(-\rho\mathbf{n}) = r^2$

$\rho^2 = r^2$

$\therefore \quad r = \rho$

証明終り

曲線の捩率

命題　捩率は、従法線の方向 ϕ の、弧長 s に対する変化率である。

証明

原点を中心とする半径 1 の球面上に長さ 1 のベクトル $\mathbf{b}(s)$ の軌跡を作る。

弧長 s をパラメターとする曲線が出来る。これを Γ_1 とする。

Γ_1 :　$\mathbf{y}=\mathbf{b}(s)$　新しく作った曲線。Γ_1 の線素を σ_1 とすると、

$$d\sigma_1^2 = d\mathbf{y}d\mathbf{y} = (\mathbf{b}',\ \mathbf{b}')ds^2 = (-\tau\mathbf{n},\ -\tau\mathbf{n})ds^2 = \tau^2 ds^2$$

$$\therefore \quad \left|\frac{d\sigma_1}{ds}\right| = |\tau|$$

曲率の場合と同様に、球面の半径は 1 だから

$$\lim_{\triangle s\to 0}\left|\frac{\triangle\phi}{\triangle\sigma_1}\right| = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{\triangle s\to 0}\left|\frac{\triangle\phi}{\triangle s}\right| = \lim_{\triangle s\to 0}\left|\frac{\triangle\phi}{\triangle\sigma_1}\frac{\triangle\sigma_1}{\triangle s}\right| = \lim_{\triangle s\to 0}\left|\frac{\triangle\sigma_1}{\triangle s}\right| = \left|\frac{d\sigma_1}{ds}\right| = |\tau|$$

$$\therefore \quad \tau = pm \lim_{\triangle s\to 0}\frac{\triangle\phi}{\triangle s}$$

証明終り

定義　$\tau \neq 0$　のとき、

$\dfrac{1}{\tau}$　を捩率半径という。

命題　$\tau = \dfrac{|\mathbf{x}', \mathbf{x}", \mathbf{x}^{(3)}|}{\mathbf{x}"\cdot\mathbf{x}"}$

証明

$$\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$$

両辺に $\mathbf{b}$ をかけて、

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}' = \tau$$

また、$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ より

これを上に代入して、

$$\tau = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' = |\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{n}'| = \left| \mathbf{x}', \frac{\mathbf{x}''}{\kappa}, \left(\frac{\mathbf{x}''}{\kappa}\right)' \right| = \left| \mathbf{x}', \frac{\mathbf{x}''}{\kappa}, \frac{\mathbf{x}^{(3)}}{\kappa} - \frac{\kappa' \mathbf{x}''}{\kappa^2} \right|$$

$$= \frac{1}{\kappa^2} |\mathbf{x}',\ \mathbf{x}'',\ \mathbf{x}^{(3)}| = \frac{|\mathbf{x}',\ \mathbf{x}'',\ \mathbf{x}^{(3)}|}{\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}''}$$

証明終り

命題　曲線 C 上の動点が $\mathbf{x}(s)$ を通過するとき、

$\tau > 0$ ならば、接触平面の負の側から正の側へ

（即ち、$\mathbf{b}$ の反対側から $\mathbf{b}$ の側へ）

$\tau < 0$ ならば、接触平面の正の側から負の側へ

移動する。

証明　$\mathbf{x}(s+h)$ から「$\mathbf{x}$ における接触平面」へ下ろした垂線の長さ

（符号を持った）を p とすれば、

$$p = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)) = \mathbf{b}(h\mathbf{x}'(s) + \frac{h^2}{2!}\mathbf{x}''(s) + \frac{h^3}{3!}\mathbf{x}^{(3)}(s+\theta h)) \quad (0 < \theta < 1)$$

ここで、$\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0,\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}'' = \mathbf{b} \cdot (\kappa \mathbf{n}) = 0,$ であるから、

$$p = \frac{h^3}{6} \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}^{(3)}(s + \theta h)$$

ここで、$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ であるから、

$$= \frac{h^3}{6} |\mathbf{t},\ \mathbf{n},\ \mathbf{x}^{(3)}(s+\theta h)| = \frac{h^3}{6\kappa} |\mathbf{x}',\ \mathbf{x}'',\ \mathbf{x}^{(3)}(s+\theta h)| = \frac{h^3}{6\kappa} \kappa^2 \tau = \frac{h^3}{6} \kappa(s) \tau(s)$$

従って、

$\tau > 0$ ならば、

$1-1)$ $h < 0$ のとき　$p < 0$　即ち、負の側から正の側へ

$1-2)$ $h > 0$ のとき　$p > 0$　即ち、負の側から正の側へ

$\tau < 0$ ならば、

$2-1)$ $h < 0$ のとき　$p > 0$　即ち、正の側から負の側へ

$2-2)$ $h>0$ のとき　$p<0$　即ち、正の側から負の側へ動く。

(証明終)