人工衛星の軌道

次の問題を解くことが目標である。

「地球表面で水平方向に、初速度 v_0 で質点を投げるとき、

その後の質点の軌道が、v_0 の値に対してどのようになるかを調べよ。

ただし、空気の抵抗、および、地球の自転の影響を無視する。」

予備工作１　$\sin x$ の逆関数 $\sin^{-1} x$ の微分

$x = \sin y$ として、この関数の逆関数を $y = \sin^{-1} x$ と書き、

アークサイン　エッ クスと読む。

（例えば、$\sin(\pi/6) = 1/2$ であるから、$\sin^{-1}(1/2) = \pi/6$ である。）

$\sin^{-1} x$ の定義域は勿論 $-1 < x < 1$ であるが、

値域は通常、上の「例えば」で書いたように、$-\pi/2$ から$\pi/2$ とする。

（例えば、$\sin(5\pi/6) = 1/2$ であるが、$\sin^{-1}(1/2) = 5\pi/6$ とはしない。）

こう定義すると $y = \sin^{-1} x$ は増加関数となる。

これで関数アークサインは定義できた。ここでこの関数の微分を求める。

$\dfrac{dy}{dx}$ を求めるのだが、$\dfrac{dx}{dy}$ が分っ ているので、これはすぐ求められる。

やっ てみる。

$x = \sin y$

$\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

ここで y は増加関数であるから、微分した関数はプラス。

即ち、$\dfrac{d(\sin^{-1} x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

即ち、$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

ということも分る。

勿論この不定積分は、いったん $\sin^{-1} x$ が定義されていれば、

置換積分により、次のようにしても求められる。

$I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$x = \sin u \quad (u = \sin^{-1} x)$ とおく。

$dx = \cos u du$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$

$\therefore \quad I = \displaystyle\int \frac{\cos u du}{\cos u} = \int du = u + C = \sin^{-1} x + C$

予備工作１、おわり

予備工作２　単振動が解になる微分方程式

一次元の運動で、常に力が中心に向いている場合の微分方程式は、

$f = m\alpha$ より、(時間 t による微分をドットで表す。)

$-l^2 x = m\ddot{x}$

$l^2/m = k$ とおいて、

$\ddot{x} + k^2 x = 0$

両辺に $2\dot{x}$ をかけて、

$2\dot{x}\ddot{x} + 2k^2 x\dot{x} = 0$

両辺を t で積分して、

$\dot{x}^2 + k^2 x^2 = C^2$

$\dot{x}^2 = C^2 - k^2 x^2$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{C^2 - k^2x^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{C^2 - k^2x^2}} = dt$$

$$\int \frac{dx}{C\sqrt{1-(k/C)^2x^2}} = \int dt$$

左辺の積分を実行するために $y = (k/c)x$ とおき、

$$\int \frac{(C/k)dy}{C\sqrt{1-y^2}} = t + B$$

$(1/k)\sin^{-1} y = t + C$

y を元に戻して、

$(1/k)\sin^{-1}(kx/C) = t + B$

$\sin^{-1}(kx/C) = k(t + B)$

$kx/C = \sin k(t + B)$

$x = (C/k)\sin(kt + kB)$

$x = (C/k)(\sin kt \cos kB + \cos kt \sin kB)$

$(C/k)\sin kB = A_0,\ (C/k)\cos kB = B_0$ とおき、

$x = A_0 \cos kt + B_0 \sin kt$

この式が、微分方程式 $\ddot{x} = -k^2x$ の解。

予備工作２、おわり

予備工作３　微分方程式 $\ddot{x} + k^2x = D$（D は定数）を解く。

実はこれは、微分方程式の一般理論を知らなければならないが、

ここでは、「上の微分方程式を満たす解で、二個の自由項があれば、

それが一般解となる」という事実を信じて貰うことにする。

さて、予備工作２で作った解、$x = A_0 \cos kt + B_0 \sin kt$ に定数項 D/k^2 を

加えた $x = A_0 \cos kt + B_0 \sin kt + D/k^2$ が一般解となる。

この解は二個の自由項 A_0 と B_0 があるから、上の式に代入して

満たすことを見ればよい。やってみる。

$\dot{x} = -kA_0 \sin kt + kB_0 \cos kt$

$\ddot{x} = -k^2 A_0 \cos kt - k^2 B_0 \sin kt$

これを上の微分方程式の左辺に代入して、

左辺 $= -k^2 A_0 \cos kt - k^2 B_0 \sin kt + k^2(A_0 \cos kt + B_0 \sin kt + D/k^2)$

$= D =$ 右辺

予備工作３、おわり

これで準備が出来たので、最初の問題を解く。

打ち上げられる質点（人口衛星）は力としては地球の引力のみを受ける。

即ち、$f = m\alpha$ において、中心方向のみに力があるので、

運動方程式を極座標表示する。

$x = r \cos\theta$

$y = r \sin\theta$

$\dot{x} = \dot{r} \cos\theta - r \sin\theta\dot{\theta}$

$\dot{y} = \dot{r} \sin\theta + r \cos\theta\dot{\theta}$

$\ddot{x} = \ddot{r} \cos\theta - 2\dot{r} \sin\theta\dot{\theta} - r \cos\theta\dot{\theta}^2 - r \sin\theta\ddot{\theta}$

$\ddot{y} = \ddot{r} \sin\theta + 2\dot{r} \cos\theta\dot{\theta} - r \sin\theta\dot{\theta}^2 + r \cos\theta\ddot{\theta}$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

ここで、極座標上の任意の点 $(r \cos\theta, r \sin\theta)$ から見ると、中心からこの点へ

向うベクトルが、

$$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

であり、このベクトルを正の方向に 90°回転したベクトルが、

$$\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

である。従って運動方程式は、

質点（人口衛星）の質量を $m,$ 地球の質量を $M,$ 万有引力係数を γ

とすると、まず中心方向の力から、

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-\gamma\frac{Mm}{r^2}$$

$$\therefore\quad \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\gamma M}{r^2}$$ ....(1)

次に、中心に直角の方向には力が働いていないから、

$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0$ ....(2)

(2) の両辺に r を掛けて、

$2r\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0$

t で積分して、

$r^2\dot{\theta}=h=const$

ここで、h は、面積速度の二倍で、これが中心力のみの運動の

時はこのように一定となる。

$$\therefore\quad \dot{\theta}=\frac{h}{r^2}$$ ....(3)

(3) により $\dot{\theta}$ が r で表されているので、

t を θ で次のように変数変換することができる。

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2}\right)\frac{h}{r^2}$$

これを (1) 式に代入して、

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2}\right)\frac{h}{r^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\gamma M}{r^2}$$

ここで、$r = \dfrac{1}{u}$ とおくと、

$$\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}u^2 h\right)u^2 h - u^3 h^2 = -u^2 \gamma M$$

$$\therefore \quad \frac{d^2u}{d\theta^2}u^2h^2 - u^3h^2 = -u^2\gamma M$$

$$\therefore \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\gamma M}{h^2}$$

予備工作３で $k = 1$ の場合であるから、一般解 u は、

$u = A\cos\theta + B\sin\theta + \dfrac{\gamma M}{h^2}$ ....(4)

ここで、地球の中心を原点に、人口衛星を打ち上げる地球上の地点を

x 軸上に、打ち上げる方向を y 軸の正の方向にとる。

さて、(4) に $t = 0$ を代入すると、$\theta = 0$ であるから、

（地球の半径を R として）

左辺 $= \dfrac{1}{R}$

右辺 $= A + \dfrac{\gamma M}{h_0^2}$

ここで打ち上げの初速度を v_0 とすると、$h^2 = R^2 v_0^2$

また質点の質量 1 の時の重力加速度は g $(= 9.8m/sec^2)$

であるから、$\gamma\dfrac{M \times 1}{R^2} = g$

即ち、$\gamma M = gR^2$、より、

$$\frac{1}{R}=A+\frac{gR^2}{R^2v_0^2}=A+\frac{g}{v_0^2}$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{R}-\frac{g}{v_0^2}$$

また (4) の両辺を θ で微分し、$t=0$ を代入すると、$\theta=0$,

x 軸に直角に打ち上げられるのだから、r の増分はなく、$\dfrac{dr}{d\theta}=0$。故に、

$$左辺=\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=0$$

$$右辺=-A\sin 0+B\cos 0=B$$

$$\therefore\quad B=0$$

上で計算した h は初速度のときに限らず一定であるから、

これで微分方程式は解けて、

$$u=\left(\frac{1}{R}-\frac{g}{v_0^2}\right)\cos\theta+\frac{g}{v_0^2}$$

$\dfrac{1}{r}=u$ であるから、

$$r=\frac{1}{\frac{g}{v_0^2}+\left(\frac{1}{R}-\frac{g}{v_0^2}\right)\cos\theta}=\frac{\frac{v_0^2}{g}}{1+\left(\frac{v_0^2}{Rg}-1\right)\cos\theta}$$

この答を、このホームページにある「二次曲線の極座標表示」の結果にあて

はめると、初速度の違いにより、下記のような分類となる。

1) $-1<\dfrac{v_0^2}{Rg}-1<0$ のとき、

楕円軌道を描く。但し、左の焦点が地球の中心にあるため、途中で

地球表面に落下し、楕円軌道のすべてが実現されることはない。

2) $\dfrac{v_0^2}{Rg}-1=0$ のとき、

円軌道を描く。

3) $0 < \dfrac{v_0^2}{Rg} - 1 < 1$ のとき、

楕円軌道を描く。右の焦点が地球の中心にあるので、これは実現する。

4) $\dfrac{v_0^2}{Rg} - 1 = 1$ のとき、

放物線を描く。

5) $1 < \dfrac{v_0^2}{Rg} - 1$ のとき、

双曲線軌道を描く。

実際に円軌道を描くための初速度を求めると、地球の半径が

$6,371,000m$ であるから、

$\sqrt{Rg} = \sqrt{6371,000 \times 9.8} = 7,901m/sec$

となる。また、放物線を描く（脱出する）ためには、

$\sqrt{2Rg} = \sqrt{2 \times 6371,000 \times 9.8} = 11,174.596m/sec$

解おわり。