

問1 四人がじゃんけんをする。4回目に初めて一人の勝者が決る確率を求めよ。

解)

一回目、二回目、三回目、四回目にじゃんけんをした後、それぞれの残りの人数が次のようになった場合が、4回目に初めて一人の勝者が決る場合である。

case1) 4, 4, 4, 1

case2) 4, 4, 3, 1

case3) 4, 4, 2, 1

case4) 4, 3, 3, 1

case5) 4, 3, 2, 1

case6) 3, 3, 3, 1

case7) 3, 3, 2, 1

case8) 3, 2, 2, 1

case9) 2, 2, 2, 1

ここで、4人が一回のじゃんけんで、1人残る、2人残る、3人残る、4人残る確率を求める。

$$\begin{aligned}(g + c + p)^4 &= g^4 + c^4 + p^4 + 4g^3c + 4g^3p \\ &\quad + 4c^3g + 4c^3p \\ &\quad + 4p^3g + 4p^3c \\ &\quad + 6g^2c^2 + 6g^2p^2 + 6c^2p^2 \\ &\quad + 12g^2cp + 12c^2gp + 12p^2gc\end{aligned}$$

$g^4, c^4, p^4, 12g^2cp, 12c^2gp, 12p^2gc$ があいこ。即ち、4人残る確率 (4-4) は

$$\frac{39}{81} = \frac{13}{27}$$

$4g^3c, 4c^3p, 4p^3g$ が三人勝ち。即ち、3人残る確率 (4-3) は

$$\frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

$6g^2c^2, 6g^2c^2, 6c^2p^2$ が二人勝ち。即ち、2人残る確率 (4-2) は

$$\frac{18}{81} = \frac{6}{27}$$

$4g^3p, 4c^3g, 4p^3c$ が一人勝ち。即ち、1人残る確率 (4-1) は

$$\frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

また、3人が一回のじゃんけんで、1人残る、2人残る、3人残る、確率を求める。

$$\begin{aligned}(g+c+p)^3 &= g^3 + c^3 + p^3 + 3g^2c + 3g^2p \\ &\quad + 3c^2g + 3c^2p \\ &\quad + 3p^2g + 3p^2c \\ &\quad + 6gcp\end{aligned}$$

$g^3, c^3, p^3, 6gcp$ があいこ。即ち、3人残る確率 (3-3) は

$$\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$3g^2c, 3c^2p, 3p^2g$ が二人勝ち。即ち、2人残る確率 (3-2) は

$$\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$3g^2p, 3c^2g, 3p^2c$ が一人勝ち。即ち、1人残る確率 (3-1) は

$$\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

また、2人が一回のじゃんけんで、1人残る、2人残る、
確率を求める。

$$(g + c + p)^2 = g^2 + c^2 + p^2 + 2gc + 2gp + 2cp$$

g^2 、 c^2 、 p^2 、があいこ。即ち、2人残る確率 (2-2) は

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$2gc$ 、 $2gp$ 、 $2cp$ が一人勝ち。即ち、1人残る確率 (2-1) は

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

さて、上の9 case のそれぞれの確率を求める。

case1) $(4-4)(4-4)(4-4)(4-1)$ で、

$$\frac{13}{27} \frac{13}{27} \frac{13}{27} \frac{4}{27} = \frac{8788}{531441}$$

case2) $(4-4)(4-4)(4-3)(3-1)$ で、

$$\frac{13}{27} \frac{13}{27} \frac{4}{27} \frac{9}{27} = \frac{6084}{531441}$$

case3) $(4-4)(4-4)(4-2)(2-1)$ で、

$$\frac{13}{27} \frac{13}{27} \frac{9}{27} \frac{6}{27} = \frac{18252}{531441}$$

case4) $(4-4)(4-3)(3-3)(3-1)$ で、

$$\frac{13}{27} \frac{4}{27} \frac{9}{27} \frac{9}{27} = \frac{4212}{531441}$$

case5) $(4-3)(3-3)(3-2)(2-1)$ で、

$$\frac{13}{27} \frac{4}{27} \frac{9}{27} \frac{6}{27} = \frac{8424}{531441}$$

case6) $(4-3)(3-3)(3-3)(3-1)$ で、

$$\frac{4}{27} \frac{9}{27} \frac{9}{27} \frac{9}{27} = \frac{2916}{531441}$$

case7) $(4-3)(3-3)(3-2)(2-1)$ で、

$$\frac{4\ 9\ 9\ 6}{27\ 27\ 27\ 9} = \frac{5832}{531441}$$

case8) $(4-3)(3-2)(2-2)(2-1)$ で、

$$\frac{4\ 9\ 3\ 6}{27\ 27\ 9\ 9} = \frac{5832}{531441}$$

case9) $(4-2)(2-2)(2-2)(2-1)$ で、

$$\frac{6\ 3\ 3\ 6}{27\ 9\ 9\ 9} = \frac{8748}{531441}$$

これらを加えて、 $\frac{69097}{531441}$ (答)