$G-1$　複素平面上に０，Ｃ，Ａ，Ｂの三点がある。

０の座標は $0+0i$, Ｃの座標は $\dfrac{\sqrt{3}+i}{6}$, Ａの座標は $0+i$, Ｂの座標は $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{3}$

である。この時、次のことを示せ。

1)　$< BAC = 60^{\circ}$、$< COB = 120^{\circ}$

（これにより四辺形 $OCAB$ は円に内接する。）

2)　$< OAC =< OBC$　を示せ。

（これは円に内接する四辺形なのであるから自明であるが、

複素数の偏角が等しいことを示し、その事実を確かめよ。）

解

$G-1-1)$

$< BAC$ を求める。

$$\gamma-\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{6}-i=\frac{\sqrt{3}-5i}{6}$$

$$\beta-\alpha=\frac{-\sqrt{3}+i}{3}-i=\frac{-\sqrt{3}-2i}{3}$$

$$\therefore\ \ \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos 60^{\circ}+i\sin 60^{\circ}=e^{i60^{\circ}}$$

即ち、$< BAC = 60^{\circ}$

$< COB$ を求める。

$$\frac{\beta}{\gamma}=-1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i120^{\circ}}$$

即ち、$< COB = 120^{\circ}$

$G-1-2)$

$< OAC$ を求める。

$\gamma - \alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{6} - i = \dfrac{\sqrt{3}-5i}{6}$

$= \dfrac{\sqrt{28}}{6}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} - i\dfrac{5}{\sqrt{28}}\right)$

$0 - \alpha = -i$

$\dfrac{\gamma-\alpha}{0-\alpha} = \dfrac{\sqrt{28}}{6}\left(\dfrac{5}{\sqrt{28}} + i\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right)$

即ち、$< OAC$ は、cos が$\dfrac{5}{\sqrt{28}}$、sin が$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$ となるような角。

$< OBC$ を求める。

$\gamma - \beta = \dfrac{3\sqrt{3}-i}{6} = \dfrac{\sqrt{28}}{6}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{28}} - \dfrac{i}{\sqrt{28}}\right)$

$0 - \beta = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)$

偏角のところだけを計算する。

$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{28}} - \dfrac{i}{\sqrt{28}}\right) / \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{28}} + i\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$

即ち、$< OBC$ は、cos が$\dfrac{5}{\sqrt{28}}$、sin が$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$ となるような角。

即ち、$< OAC =< OBC$　　解終り。