$B.433$　z 軸を軸とすつ半径 1 の円柱の側面で、xy 平面上より上

（z 軸の正の方向）にあり、平面 $x-\sqrt{3}y+z=1$ より下にある部分

を D とする。D の面積 S を求めよ。

解 1　y 軸を縦軸と考え、$z-x$ 平面に切り口の射影（積分範囲）を作り、

面分の公式を用いて律義に求める。

$$y=\frac{x+z-1}{\sqrt{3}} \quad ... \quad (1)$$

$$x^2+y^2=1 \quad ... \quad (2)$$

(2) を (1) に代入。

$$x^2+\left(\frac{x+z-1}{\sqrt{3}}\right)^2=1$$

$$z^2+2(x-1)z+(4x^2-2x-2)=0$$

$$z=-x+1\pm\sqrt{3(1-x^2)}$$

これは直線 $z=-x+1$ に楕円 $z=\pm\sqrt{3(1-x^2)}$ を足したグラフ。

グラフの存在する範囲は $-1\leq x\leq 1$ （点 $(-1,2)$ と点 $(1,0)$ を通る。）

また、$z=0$ の時、$x=1\ or\ -\frac{1}{2}$ 　$\left(\text{点}\ (-\frac{1}{2},0)\ \text{を通る。}\right)$

即ち、点 $(-1,2)$ から点 $(1,0)$ までを繋ぐ曲線 $z=-x+1+\sqrt{3(1-x^2)}$

は、y 軸の正の方向に存在する円柱の側面 S_1 に対応する積分範囲の限界を表し、

点 $(-1,2)$ から点 $(-\frac{1}{2},0)$ までを繋ぐ曲線 $z=-x+1-\sqrt{3(1-x^2)}$

は、y 軸の負の方向に存在する円柱の側面 S_2 に対応する積分範囲の限界を表す。

さて、面分 $dS=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+1}\ dzdx$ を求める。

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$ であるから、

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \left[\int_{0}^{-x+1+\sqrt{3(1-x^2)}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[-x+1+\sqrt{3(1-x^2)} \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{3} \right) dx$$

$$= \left[\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}x \right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi + 2\sqrt{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{-1/2} \left[\int_{0}^{-x+1-\sqrt{3(1-x^2)}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[-x+1-\sqrt{3(1-x^2)} \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{-1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{3} \right) dx$$

$$= \left[\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} - \sqrt{3}x \right]_{-1}^{-1/2}$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$ （答）

解 2　展開図を描くことにより求める方法。

$$x = \cos\theta,\quad y = \sin\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi) \quad \ldots \ (1)$$

$$0 \le z \le 1 - x + \sqrt{3}y \quad \ldots \ (2)$$

(1) を (2) に代入して、

$$0 \le z \le 1 - \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 1 - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \quad \ldots \ (3)$$

(3) の右辺と $z=0$ との交点を求めて、展開図の存在する範囲を求める。

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\theta=0\ or\ \frac{4\pi}{3}$$

$$S=\int_0^{4\pi/3}\left[1-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]\,d\theta$$

$$=\left[\theta-2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{4\pi/3}=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$$ （答）