問（円筒 1）　半径 1 の円筒の側面の半分

$$y^2 + z^2 = 1 \quad (z \geq 0) \ \ (x \text{ は任意})$$

を、半径 1 の円筒の側面

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (z \text{ は任意})$$

で切り取 っ た面積 S を求めよ。

解 1　$x - y$ 平面の第 1 象限上の面積を S_1 とし、これを求める。

$$\text{面分 } dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

ここで、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

であるから、これを代入して面分を求めると、

$$dS = \frac{dxdy}{\sqrt{1-y^2}}$$

積分区間（半径 1 の円の四分の一）に変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

を施す。ヤコビアンは r であるから、

$$S_1 = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{rdrd\theta}{\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}}\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{-\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1+\cos\theta}$$

$\tan\theta/2 = t$ とおいて、

$$d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

θ	$0 \longrightarrow \pi/2$
t	$0 \longrightarrow \quad 1$

$$\therefore \quad S_1 = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2} \frac{2}{1+t^2}\,dt = 1$$

$$\therefore S = 4S_1 = 4$$

解 2　上は律義に面分の公式を用いて解を作ったが、円筒の側面であるから、

展開図を作ることが出来る。以下はこの方法による解答。解 1 と同様に

第 1 象限上の面積 S_1 を求める。

$y^2 + z^2 = 1$　であるから、

$y = \sin\theta, \quad z = \cos\theta$

とおくことが出来る。

$x^2 + y^2 = 1$　の y に上の式を代入して、

$x = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \cos\theta$

x を縦軸、θ を横軸にとれば、切り取られた側面の展開図が出来る。

θ の範囲は 0 から$\pi/2$ まで。即ち、

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = [\sin\theta]_0^{\pi/2} = 1$$

$$\therefore S = 4S_1 = 4$$