3次、4次方程式の解法

能美武功

平成12年5月5日

1　２次方程式の解法

まず最初に、2 次方程式の根の公式を復習する。

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

(ここで係数は一般に複素数であると仮定する。)
x_1, x_2 を上式の 2 根とすると、$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ より、

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = 0. \tag{2}$$

両式を比較して、

$$x_1 + x_2 = -b/a \tag{3}$$

$$x_1x_2 = c/a \tag{4}$$

従って、もし何かの方法で、

$$x_1 - x_2 \tag{5}$$

が係数 a, b, c で表されれば、式 (3) と式 (5) により、x_1, x_2 が求まる。
幸いなことに式 (5) の 2 乗を計算すれば、
$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (-b/a)^2 - 4(c/a) = (b^2 - 4ac)/a^2$
この分子を D と書き、式 (1) の判別式ということにする。

$$D = b^2 - 4ac, \tag{6}$$

これを使うと式 (5) は、次のように書け、

$$x_1 - x_2 = \sqrt{D}/a \tag{7}$$

(a, b, c は複素数であるから、$\sqrt{D}$は一般に 2 個の値を持つことに注意。)
式 (3) と式 (7) により、

$$x_1 = (-b + \sqrt{D})/2a \tag{8}$$

問 1. 次の *2* 次方程式の *2* 根を求めよ。

$$(2+9i)x^2+(17-51i)+(-145+240i)=0 \tag{9}$$

解
$D=7488+1566i$
D の平方根を求めるために、絶対値と偏角を求める。
D の絶対値 $=7650$
D の偏角 $=0.206163217045(rad)$
$\sqrt{D}$を求めるために、D の絶対値の 2 乗根と D の偏角の 2 分の 1 を求める。
D の絶対値の 2 乗根 $=87.4642784227$
D の偏角の 2 分の 1 $=0.1030816085$
故に、
$\sqrt{D}=87.4642784227(cos(0.1030816085)+sin(0.1030816085))=87+9i$
または、
$\sqrt{D}=87.4642784227(-cos(0.1030816085)-sin(0.1030816085))=-87-9i$
$\therefore \quad x=(-b+\sqrt{D})/2a=4-3i \quad or \quad 1+6i$ （解おわり）

2　3 次方程式の解法

$$a'_0x^3+a'_1x^2+a'_2x+a'_3=0 \tag{10}$$

両辺を a'_0 で割って、

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \tag{11}$$

3 根を x_1,x_2,x_3とすると、$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$ となるから、これを展開して、

$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0 \tag{12}$$

これと式 12 を比較して、3 次方程式の「根と係数の関係」、

$$x_1+x_2+x_3=-a_1 \tag{13}$$

$$x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3=a_2 \tag{14}$$

$$x_1x_2x_3 = -a_3 \tag{15}$$

が出てくる。
ここでωを 1 の虚 3 乗根 $(-1+i\sqrt{3})/2$ として、x_1, x_2, x_3とωの関数 u, v を次のように定義する。

$$u = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \tag{16}$$

$$v = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \tag{17}$$

ω に関する関係式、

$$1 + \omega + \omega^2 = 0 \tag{18}$$

を使って、(13)+(16)+(17) を計算すれば、
$-a_1 + u + v = 3x_1$。即ち、

$$x_1 = (-a_1 + u + v)/3 \tag{19}$$

同様に、$(13) + \omega^2(16) + \omega(17)$ を計算すれば、
$-a_1 + \omega^2 u + \omega v = 3x_2$。即ち、

$$x_2 = (-a_1 + \omega^2 u + \omega v)/3 \tag{20}$$

同様に、$(13) + \omega(16) + \omega^2(17)$ を計算すれば、
$-a_1 + \omega u + \omega^2 v = 3x_2$。即ち、

$$x_3 = (-a_1 + \omega u + \omega^2 v)/3 \tag{21}$$

従って、u, v が (12) の係数 a_1, a_2, a_3で表されれば x_1, x_2, x_3は求まる。ところが、後で練習問題として解くように、幸いなことに u^3+v^3 と u^3-v^3が a_1, a_2, a_3 で表される。即ち、

$$A = 9a_1a_2 - 2a_1^3 - 27a_3 \tag{22}$$

$$D = a_1^2a_2^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_3^2 + 18a_1a_2a_3 \tag{23}$$

とおくと、

$$u^3 + v^3 = A \tag{24}$$

$$u^3 - v^3 = \sqrt{-27D} \tag{25}$$

となるのである。従って、

$$u^3 = (A + \sqrt{-27D})/2 \tag{26}$$

$$v^3 = (A - \sqrt{-27D})/2 \tag{27}$$

(26) を 3 乗根に開いてその一つの根を u_1 とすれば、他の 2 根は
$u_2 = \omega u_1, u_3 = \omega^2 u_1$ と表され、
(27) を 3 乗根に開いてその一つの根を v_1 とすれば、他の 2 根は
$v_2 = \omega v_1, v_3 = \omega^2 v_1$ と表される。
ところが、式 (19) に代入すべき u,v を上のどの組み合わせにすればよいかは分からない。従って実際に問題を解く場合には全ての組み合わせを作って、式 (12) に代入して求める。即ち、泥臭いが、
$x_1 = (-a_1 + u_1 + v_1)/3,$
$x_2 = (-a_1 + u_1 + v_2)/3,$
$x_3 = (-a_1 + u_1 + v_3)/3,$
$x_4 = (-a_1 + u_2 + v_1)/3,$
$x_5 = (-a_1 + u_2 + v_2)/3,$
$x_6 = (-a_1 + u_2 + v_3)/3,$
$x_7 = (-a_1 + u_3 + v_1)/3,$
$x_8 = (-a_1 + u_3 + v_2)/3,$
$x_9 = (-a_1 + u_3 + v_3)/3,$
を作って式 (12) に代入する。0 になる組み合わせが解である。

それでは、やり残した公式の証明をする。

問 **2.** 次の公式を示せ。

$$u^3 + v^3 = 9a_1a_2 - 2a_1^3 - 27a_3 \tag{28}$$

解　$u^3 + v^3$
$= x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\omega x_1^2x_2+3\omega^2x_1^2x_3+3\omega^2x_2^2x_1+3\omega x_2^2x_3+3\omega x_3^2x_1+3\omega^2x_3^2x_2+$
$6x_1x_2x_3$
$+x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\omega^2x_1^2x_2+3\omega x_1^2x_3+3\omega x_2^2x_1+3\omega^2x_2^2x_3+3\omega^2x_3^2x_1+3\omega x_3^2x_2+$
$6x_1x_2x_3$
$= 2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2)+12x_1x_2x_3$
ここで (　,　,　) の記号を導入し、次の意味で使う。高い冪の順序になっていることに
注意。
$(3,0,0) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3,$
$(2,1,0) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2,$
$(1,1,1) = x_1x_2x_3,$
$(1,0,0) = x_1 + x_2 + x_3,$
$(1,1,0) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$
$(3,2,1) = x_1^3x_2^2x_3 + x_1^3x_3^2x_2 + x_2^3x_1^2x_3 + x_2^3x_3^2x_1 + x_3^3x_1^2x_2 + x_3^3x_2^2x_1,$
$(4,1,1) = x_1^4x_2x_3 + x_2^4x_1x_3 + x_3^4x_1x_2,$

$(4,2,0)=x_1^4x_2^2+x_1^4x_3^2+x_2^4x_1^2+x_2^4x_3^2+x_3^4x_1^2+x_3^4x_2^2,$
$(3,3,0)=x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3,$
$(2,2,2)=x_1^2x_2^2x_3^2.$
（ここで、$(1,0,0)$、$(1,1,0)$、$(1,1,1)$ は、既に方程式の係数で表されていることに注意。）
この記号を使うと、u^3+v^3は簡単に次のように表される。
$u^3+v^3=2(3,0,0)-3(2,1,0)+12(1,1,1).$
従って、問題は上式の右辺を $(1,0,0)$、$(1,1,0)$、$(1,1,1)$ で表せばよいことになる。
まず直観的に $(3,0,0)$ は、$(1,0,0)$ を 3 乗すれば出てきそうな気がする。やってみると、
$(1,0,0)^3=(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1^2x_2+x_1^2x_3++x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2)+6x_1x_2x_3$
$=(3,0,0)+3(2,1,0)+6(1,1,1).$
ここで $(2,1,0)$ が同様にできればいいが、それは $(1,0,0)$ と $(1,1,0)$ をかければ出てきそうである。やってみる。
$(1,0,0)(1,1,0)=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
$=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2+3x_1x_2x_3$
$=(2,1,0)+3(1,1,1).$
$\therefore\quad (2,1,0)=(1,0,0)(1,1,0)-3(1,1,1).$
$\therefore\quad (3,0,0)=(1,0,0)^3-3(2,1,0)-6(1,1,1)=(1,0,0)^3-3[(1,0,0)(1,1,0)-3(1,1,1)]-6(1,1,1)=(1,0,0)^3-3(1,0,0)(1,1,0)+3(1,1,1).$
$\therefore\quad u^3+v^3=2[(1,0,0)^3-3(1,0,0)(1,1,0)+3(1,1,1)]-3[(1,0,0)(1,1,0)-3(1,1,1)]+12(1,1,1)=2(1,0,0)^3-9(1,0,0)(1,1,0)+27(1,1,1)$
$=-2a_0^3+9a_1a_2-27a_3.$ （解おわり）

次に、D を求める。

問 **3.** 次の公式を示せ。
$(u^3-v^3)^2=-27(a_1^2a_2^2-4a_2^3-4a_1^3a_3-27a_3^2+18a_1a_2a_3).$
解　最初に$\omega-\omega^2=(-1+i\sqrt{3})/2-(-1-i\sqrt{3})/2=i\sqrt{3},$
$\omega^2-\omega=(-1-i\sqrt{3})/2-(-1+i\sqrt{3})/2=-i\sqrt{3},$
であることを注意しておく。さて、計算。
$u^3-v^3=(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)^3-(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3)^3$
$=(x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\omega x_1^2x_2+3\omega^2x_1^2x_3+3\omega^2x_2^2x_1+3\omega x_2^2x_3+3\omega x_3^2x_1+3\omega^2x_3^2x_2)$
$-(x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\omega^2x_1^2x_2+3\omega x_1^2x_3+3\omega x_2^2x_1+3\omega^2x_2^2x_3+3\omega^2x_3^2x_1+3\omega x_3^2x_2)$
$=i3\sqrt{3}(x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1-x_3^2x_2)$
（この括弧内を計算すると、$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ となることに

注意。即ち、3 実根を持つときには、この値を 2 乗したものはプラスとなる。つまり、3 次方程式の判別式。)
さて、上式の右辺の括弧の 2 乗を計算する。

$$
\begin{aligned}
&(x_1^2x_2 - x_1^2x_3 - x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 - x_3^2x_2)^2 \\
&= (4,2,0) \\
&- 2x_1^4x_2x_3 - 2x_1^3x_2^3 + 2x_1^3x_3^2x_2 + 2x_2^3x_1^2x_3 - 2x_1^2x_2^2x_3^2 \\
&+ 2x_1^3x_2^2x_3 - 2x_1^3x_3^3 - 2x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_3^3x_1^2x_2 \\
&- 2x_1^2x_2^2x_3^2 - 2x_2^4x_1x_3 + 2x_2^3x_3^2x_1 \\
&+ 2x_3^3x_2^2x_1 - 2x_3^4x_1x_2 \\
&- 2x_2^3x_3^3 \\
&= (4,2,0) \\
&- 2x_1^4x_2x_3 - 2x_1^2x_2^2x_3^2 - 2x_1^3x_2^3 + 2x_1^3x_3^2x_2 + 2x_2^3x_1^2x_3 \\
&\qquad\qquad - 2x_1^2x_2^2x_3^2 - 2x_1^3x_3^3 + 2x_1^3x_2^2x_3 + 2x_3^3x_1^2x_2 \\
&- 2x_2^4x_1x_3 - 2x_1^2x_2^2x_3^2 \qquad\qquad + 2x_2^3x_3^2x_1 \\
&- 2x_3^4x_1x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 2x_3^3x_2^2x_1 \\
&\qquad\qquad\qquad - 2x_2^3x_3^3 \\
&= (4,2,0) - 2(4,1,1) - 6(2,2,2) - 2(3,3,0) + 2(3,2,1).
\end{aligned}
$$

さて、$(4,2,0)$ を求めるためには何を計算すればよいか。少し慣れてきた人には分かるだろう。それは、$(1,0,0)^2(1,1,0)^2$。では、やってみる。

$$
\begin{aligned}
&(1,0,0)^2(1,1,0)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 \\
&= (x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + 3x_1x_2x_3)^2 \\
&= (4,2,0) + 9x_1^2x_2^2x_3^2 \\
&+ 2x_1^4x_2x_3 + 2x_1^3x_2^3 + 2x_2^3x_1^2x_3 + 2x_1^3x_3^2x_2 + 2x_1^2x_2^2x_3^2 + 6x_1^3x_2^2x_3 \\
&+ 2x_1^3x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_1^3x_3^3 + 2x_3^3x_1^2x_2 + 6x_1^3x_3^2x_2 \\
&+ 2x_2^4x_1x_3 + 2x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_2^3x_3^2x_1 + 6x_2^3x_1^2x_3 \\
&+ 2x_3^3x_2^2x_1 + 2x_2^3x_3^3 + 6x_2^3x_3^2x_1 \\
&+ 2x_3^4x_1x_2 + 6x_3^3x_1^2x_2 \\
&+ 6x_3^3x_2^2x_1 \\
&= (4,2,0) + 9x_1^2x_2^2x_3^2 \\
&+ 2x_1^4x_2x_3 + 2x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_1^3x_2^3 + 2x_2^3x_1^2x_3 + 2x_1^3x_3^2x_2 + 6x_1^3x_2^2x_3 \\
&\qquad\qquad + 2x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_1^3x_3^3 + 2x_1^3x_2^2x_3 + 2x_3^3x_1^2x_2 + 6x_1^3x_3^2x_2 \\
&+ 2x_2^4x_1x_3 \ + 2x_1^2x_2^2x_3^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 2x_2^3x_3^2x_1 + 6x_2^3x_1^2x_3 \\
&\qquad\qquad + 2x_2^3x_3^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2x_3^3x_2^2x_1 + 6x_2^3x_3^2x_1 \\
&+ 2x_3^4x_1x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 6x_3^3x_1^2x_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 6x_3^3x_2^2x_1 \\
&= (4,2,0) + 2(4,1,1) + 15(2,2,2) + 2(3,3,0) + 8(3,2,1).
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad (4,2,0) = (1,0,0)^2(1,1,0)^2 - 2(4,1,1) - 15(2,2,2) - 2(3,3,0) - 8(3,2,1).$$

ここで、計算が最後の段階に行き着いたかどうか見やすくするために、次の記号を導入する。

$(1,0,0)=\sigma_1,$
$(1,1,0)=\sigma_2,$
$(1,1,1)=\sigma_3.$
すると $(4,2,0)$ は、
$(4,2,0)=\sigma_1^2\sigma_2^2-2(4,1,1)-15\sigma_3^2-2(3,3,0)-8(3,2,1)$
となり、まだ $(4,1,1),(3,3,0),(3,2,1)$ が変形すべきものとして残されていることが分かる。
従 っ てまず、$(4,1,1)$ を計算する。それは、$(1,0,0)^3(1,1,1)$ を実行すればよい。
$(1,0,0)^3(1,1,1)=(x_1+x_2+x_3)^3x_1x_2x_3$
$=[(3,0,0)+3(2,1,0)+6(1,1,1)](1,1,1)=(4,1,1)+3(3,2,1)+6(2,2,2).$
$\therefore\quad (4,1,1)=\sigma_1^3\sigma_3-3(3,2,1)-6\sigma_3^2.$
次に、$(3,3,0)$ を求める。それには、$(1,1,0)^3$を計算すればよい。
$(1,1,0)^3=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^3$
$=(3,3,0)+3(3,2,1)+6(2,2,2).$
$\therefore\quad (3,3,0)=\sigma_2^3-3(3,2,1)-6\sigma_3^2.$
次に、$(3,2,1)$ を求める。それには $(1,0,0)(1,1,0)(1,1,1)$ を計算すればよい。
$(1,0,0)(1,1,0)(1,1,1)=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x_1x_2x_3$
$=[(2,1,0)+3(1,1,1)](1,1,1)=(3,2,1)+3(2,2,2).$
$\therefore\quad (3,2,1)=\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2.$
$\therefore\quad (4,1,1)=\sigma_1^3\sigma_3-3(\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2)-6\sigma_3^2$
$\qquad\qquad =-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2+\sigma_1^3\sigma_3.$
$\therefore\quad (3,3,0)=\sigma_2^3-3[\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2]-6\sigma_3^2$
$\qquad\qquad =3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\sigma_2^3$これまで導いてきた公式を並べると、
$(4,1,1)=\ \ 3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\qquad\qquad +\sigma_1^3\sigma_3,$
$(3,3,0)=\ \ 3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\sigma_2^3,$
$(3,2,1)=-3\sigma_3^2+\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$
従って、
$(4,2,0)=\sigma_1^2\sigma_2^2-2(4,1,1)-15\sigma_3^2-2(3,3,0)-8(3,2,1)$
$=\sigma_1^2\sigma_2^2-15\sigma_3^2$
$\quad -2(\ \ 3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\qquad\qquad +\sigma_1^3\sigma_3)$
$\quad -2(\ \ 3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\sigma_2^3)$
$\quad -8(-3\sigma_3^2+\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$
$=\sigma_1^2\sigma_2^2-3\sigma_3^2+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3-2\sigma_1^3\sigma_3.$
従って結局、
$(x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1-x_3^2x_2)^2$
$=(4,2,0)-2(4,1,1)-6(2,2,2)-2(3,3,0)+2(3,2,1)$
$=\sigma_1^2\sigma_2^2-3\sigma_3^2+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3-2\sigma_1^3\sigma_3.$
$\quad -2(3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\qquad\qquad +\sigma_1^3\sigma_3)$

$-6\sigma_3^2$
$-2(\ \ 3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\sigma_2^3)$
$+2(-3\sigma_3^2+\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$
$=\sigma_1^2\sigma_2^2-27\sigma_3^2+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_2^3-4\sigma_1^3\sigma_3.$
従って与えられた式 $(u^3-v^3)^2$は、
$(u^3-v^3)^2=-27(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$
$=-27(\sigma_1^2\sigma_2^2-27\sigma_3^2+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_2^3-4\sigma_1^3\sigma_3)$
$=-27[(-a_1)^2a_2^2-27(-a_3)^2+18(-a_1)a_2(-a_3)-4a_2^3-4(-a_1)^3(-a_3)]$
$=-27(a_1^2a_2^2-4a_2^3-4a_1^3a_3-27a_3^2+18a_1a_2a_3)$ （解おわり）

問 4. 次の 3 次方程式の根を求めよ。
$(1+i)x^3+(-1-3i)x^2+(7-17i)x+(-31-53i)=0$
解　まず $(1+i)$ で両辺を割って x^3の係数を 1 にする。
$x^3+(-2-i)x^2+(-5-12i)x+(-42-11i)=0$
次に A を計算する。
$9a_1a_2=-18+261i$
$-2a_1^3=4+22i$
$-27s_3=1134+297i$
$u^3+v^3=A=1120+580i$
次に D を計算する。
$a_1^2a_2^2=-837-116i$
$-27a_3^2=-44361-24948i$
$18a_1a_2a_3=7254-21528i$
$-4a_2^3=-8140-3312i$
$-4a_1^3a_3=148-1936i$
$D=-45936-51840i$
$\therefore\quad (u^3-v^3)^2=-27D=1240272+1399680i$
$-27D$ を平方に開いて u^3-v^3を求める。
$-27D$ の絶対値 $=1870128,$
$-27D$ の偏角 $=0.845707852266\ (rad),$
$-27D$ の絶対値の平方根 $=1367.52623375,$
$-27D$ の偏角の $1/2=0.422853926133,$
$\therefore\quad u^3-v^3=sqrt{-27D}.$
$=1367.52623375(\cos(0.422853926133)+i\sin(0.422853926133))$
$=1247.07658145+561.184461652i.$
$\therefore\quad u^3=(A+\sqrt{-27D})/2=1183.53829072+570.592230826i,$
$\quad\quad v^3=(A-\sqrt{-27D})/2=-63.5382907248+9.40776917384i.$
u^3,v^3の立方根を求める。
u^3の絶対値 $=1313.90196723,$

u^3の偏角 $= 0.449231111591$,
u^3の絶対値の立方根 $= 10.9526948386$,
u^3の偏角の 3 分の 1 $= 0.149743703864$,
(u^3の偏角の 3 分の 1) $+ (2/3)\pi = 2.24413880626$,
(u^3の偏角の 3 分の 1) $- (2/3)\pi = -1.94465139853$.
以上の結果から u の 3 個の値、u_1, u_2, u_3が求まる。
$u_1 = 10.8301270189 + 1.63397459622i$,
$u_2 = -6.83012701892 + 8.56217782649i$,
$u_3 = -4 - 10.1961524227i$.
全く同様にして v の 3 個の値、v_1, v_2, v_3が求まる。
$v_1 = 2.16987298108 + 3.36602540378i$,
$v_2 = -4 + 0.196152422707i$,
$v_3 = 1.83012701892 - 3.56217782649i$.
これらを x を求める 9 個の式に代入し、次の 9 個の値を得る。
$x_1 = 5 + 2i$,
$x_2 = 2.94337567297 + 0.943375672974i$,
$x_3 = 4.88675134595 - 0.309401076759i$,
$x_4 = -0.886751345948 + 4.30940107676i$,
$x_5 = -2.94337567297 + 3.25277674973i$,
$x_6 = -1 + 2i$,
$x_7 = 0.056624327026 - 1.94337567297i$,
$x_8 = -2 - 3i$,
$x_9 = -0.056624327026 - 4.25277674973i$.
これらを元の方程式に代入して、
$f(x_1) = 0 + 0i$,
$f(x_2) = -37.7485783982 - 46.2385963442i$,
$f(x_3) = -5.4458557658 - 107.966944819i$,
$f(x_4) = 90.7791890991 - 58.6997218479i$,
$f(x_5) = 64.3639440343 + 98.3950151413i$,
$f(x_6) = -0 + 0i$,
$f(x_7) = -58.9180882685 + 9.5719296775i$,
$f(x_8) = 0 + 0i$,
$f(x_9) = -53.0306107009 + 104.938318192i$.
従って、根は次の 3 個であることが分かる。
$x_1 = 5 + 2i$,
$x_6 = -1 + 2i$,
$x_8 = -2 - 3i$. （解おわり）

3　4次方程式の解法

4次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{29}$$

の4根を、x_1, x_2, x_3, x_4として、上式を因数分解すると、

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$

これを展開して、

$x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2$

$- (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4 = 0.$

両式を比較して、根と係数の関係、

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a,$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b,$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -c,$

$x_1x_2x_3x_4 = d,$

が出る。

4根、x_1, x_2, x_3, x_4の関数、u_1, u_2, u_3を次のように定義する。

$u_1 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$

$u_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$

$u_3 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4.$

もし何かの幸運で、u_1, u_2, u_3の値が分かったとすると、根と係数の関係の最初の式、それと、u の定義式から、x_1, x_2, x_3, x_4が次のように解ける。

$x_1 = (-a + u_1 + u_2 + u_3)/4,$

$x_2 = (-a + u_1 - u_2 - u_3)/4,$

$x_3 = (-a - u_1 + u_2 - u_3)/4,$

$x_4 = (-a - u_1 - u_2 + u_3)/4.$

ところが幸いなことに、次の A, B, C は方程式 (29) の係数、a, b, c, d で表される。

$A = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$

$B = u_1^2u_2^2 + u_1^2u_3^2 + u_2^2u_3^2,$

$C = u_1u_2u_3.$

実際、後に問題によって計算するように、A, B, C は次のように表される。

$A = 3a^2 - 8b,$

$B = 3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac - 64d,$

$C = -a^3 + 4ab - 8c.$

即ち、u_1^2, u_2^2, u_3^2は次の3次方程式の3根。

$$t^3 - At^2 + Bt - C^2 = 0. \tag{30}$$

3次方程式の時と同様に、この場合も2個づつ出てくる根のうちどれを使ったらよいかは、やってみないと分からない。即ち、次の4個のxも作っておいて、原方程式に代入する。
$x_5 = (-a + u_1 + u_2 - u_3)/4,$
$x_6 = (-a + u_1 - u_2 + u_3)/4,$
$x_7 = (-a - u_1 + u_2 + u_3)/4,$
$x_8 = (-a - u_1 - u_2 - u_3)/4.$

さて、A, B, C の公式を確かめる。

問 **5.** $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 3a^2 - 8b$
を確かめよ。
解　3次方程式のときと同様に、ここでも(　,　,　,　)を次のように定義する。
$-a = \sigma_1 = (1,0,0,0) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$
$b = \sigma_2 = (1,1,0,0) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$
$-c = \sigma_3 = (1,1,1,0) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4,$
$d = \sigma_4 = (1,1,1,1) = x_1x_2x_3x_4,$
$(2,0,0,0) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$
$(2,1,1,0) = x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + x_1^2x_3x_4 + x_2^2x_1x_3 + x_2^2x_1x_4 + x_2^2x_3x_4 + x_3^2x_1x_2 + x_3^2x_1x_4 + x_3^2x_2x_4 + x_4^2x_1x_2 + x_4^2x_1x_3 + x_4^2x_2x_3,$
$(3,1,0) = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_1^3x_4 + x_2^3x_1 + x_2^3x_3 + x_2^3x_4 + x_3^3x_1 + x_3^3x_2 + x_3^3x_4 + x_4^3x_1 + x_4^3x_2 + x_4^3x_3,$
等々。
さて、Aの計算。
$u_1^2 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$
$= (2,0,0,0) + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4,$
$u_2^2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2$
$= (2,0,0,0) - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4,$
$u_3^2 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2$
$= (2,0,0,0) - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$
$\therefore \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 3(2,0,0,0) - 2(1,1,0,0)$
$(2,0,0,0)$は、a^2を計算すれば出る。
$a^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = (2,0,0,0) + 2(1,1,0,0)$
$= (2,0,0,0) + 2b,$
$\therefore \quad (2,0,0,0) = a^2 - 2b.$
$\therefore \quad A = 3(a^2 - 2b) - 2b = 3a^2 - 8b.$　(解おわり)

問 **6.** $u_1^2u_2^2 + u_1^2u_3^2 + u_2^2u_3^2 = 3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac - 64d,$
を示せ。

解

$$
\begin{aligned}
u_1u_2 &= (x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4) \\
&= x_1x_1+x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4 \\
&\quad -x_2x_1-x_2x_2+x_2x_3+x_2x_4 \\
&\quad +x_3x_1+x_3x_2-x_3x_3-x_3x_4 \\
&\quad -x_4x_1-x_4x_2+x_4x_3+x_4x_4 \\
&= x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2-2x_1x_4+2x_2x_3, \\
u_1u_3 &= (x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4) \\
&= x_1x_1+x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4 \\
&\quad -x_2x_1-x_2x_2+x_2x_3+x_2x_4 \\
&\quad -x_3x_1+x_3x_2+x_3x_3+x_3x_4 \\
&\quad +x_4x_1+x_4x_2-x_4x_3-x_4x_4 \\
&= x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2-2x_1x_3+2x_2x_4, \\
u_2u_3 &= (x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4) \\
&= x_1x_1-x_1x_2+x_1x_3-x_1x_4 \\
&\quad -x_2x_1+x_2x_2-x_2x_3+x_2x_4 \\
&\quad -x_3x_1+x_3x_2-x_3x_3+x_3x_4 \\
&\quad +x_4x_1-x_4x_2+x_4x_3-x_4x_4 \\
&= x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-2x_1x_2+2x_3x_4.
\end{aligned}
$$

$\therefore$

$$
\begin{aligned}
(u_1u_2)^2 &= (x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2-2x_1x_4+2x_2x_3)^2 \\
&= (4,0,0,0)+4x_1^2x_4^2+4x_2^2x_3^2 \\
&\quad -2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2+2x_1^2x_4^2-4x_1^3x_4+4x_1^2x_2x_3 \\
&\quad +2x_2^2x_3^2-2x_2^2x_4^2+4x_2^2x_1x_4-4x_2^3x_3 \\
&\quad -2x_3^2x_4^2+4x_3^2x_1x_4-4x_3^3x_2 \\
&\quad -4x_4^3x_1+4x_4^2x_2x_3 \\
&\quad -8x_1x_2x_3x_4, \\
(u_1u_3)^2 &= (x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2-2x_1x_3+2x_2x_4)^2 \\
&= (4,0,0,0)+4x_1^2x_3^2+4x_2^2x_4^2 \\
&\quad -2x_1^2x_2^2+2x_1^2x_3^2-2x_1^2x_4^2-4x_1^3x_3+4x_1^2x_2x_4 \\
&\quad -2x_2^2x_3^2+2x_2^2x_4^2+4x_2^2x_1x_3-4x_2^3x_4 \\
&\quad -2x_3^2x_4^2+4x_3^2x_2x_4-4x_3^3x_1 \\
&\quad -4x_4^3x_2+4x_4^2x_1x_3 \\
&\quad -8x_1x_2x_3x_4, \\
(u_2u_3)^2 &= (x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-2x_1x_2+2x_3x_4)^2 \\
&= (4,0,0,0)+4x_1^2x_2^2+4x_3^2x_4^2 \\
&\quad +2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2-2x_1^2x_4^2-4x_1^3x_2+4x_1^2x_3x_4 \\
&\quad -2x_2^2x_3^2-2x_2^2x_4^2+4x_2^2x_3x_4-4x_2^3x_1 \\
&\quad +2x_3^2x_4^2+4x_3^2x_1x_2-4x_3^3x_4
\end{aligned}
$$

$$- 4x_4^3x_3 + 4x_4^2x_1x_2$$
$$- 8x_1x_2x_3x_4,$$
$$\therefore \quad B = u_1^2u_2^2 + u_1^2u_3^2 + u_2^2u_3^2$$
$$= 3(4,0,0,0)+2(2,2,0,0)-4(3,1,0,0)+4(2,1,1,0)-24(1,1,1,1).$$
ここで、$(4,0,0,0)$ の計算のために a^4を作る。
$$a^4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^4$$
$$= (4,0,0,0) + 4(3,1,0,0) + 6(2,2,0,0) + 12(2,1,1,0) + 24d.$$
$$\therefore \quad (4,0,0,0) = a^4 - 4(3,1,0,0) - 6(2,2,0,0) - 12(2,1,1,0) - 24d.$$
$(3,1,0,0)$ の計算のために a^2b を作る。
$$a^2b = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2b)b$$
$$= 2b^2 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$$
$$= 2b^2 + x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_1^3x_4 + x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + x_1^2x_3x_4$$
$$+ x_2^3x_1 + x_2^3x_3 + x_2^3x_4 + x_2^2x_1x_3 + x_2^2x_1x_4 + x_2^2x_3x_4$$
$$+ x_3^3x_1 + x_3^3x_2 + x_3^3x_4 + x_3^2x_1x_2 + x_3^2x_1x_4 + x_3^2x_2x_4$$
$$+ x_4^3x_1 + x_4^3x_2 + x_4^3x_3 + x_4^2x_1x_2 + x_4^2x_1x_3 + x_4^2x_2x_3$$
$$= (3,1,0,0) + (2,1,1,0) + 2b^2.$$
$$\therefore \quad (3,1,0,0) = a^2b - (2,1,1,0) - 2b^2.$$
$(2,2,0,0)$ の計算のために b^2を作る。
$$b^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)^2$$
$$= (2,2,0,0)$$
$$+ 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1^2x_2x_4 + 2x_2^2x_1x_3 + 2x_2^2x_1x_4 + 2x_1x_2x_3x_4$$
$$+ 2x_1^2x_3x_4 + 2x_3^2x_1x_2 + 2x_12x_2x_3x_4 + 2x_3^2x_1x_4$$
$$+ 2x_1x_2x_3x_4 + 2x_4^2x_1x_2 + 2x_4^2x_1x_3$$
$$+ 2x_2^2x_3x_4 + 2x_3^2x_2x_4$$
$$+ 2x_4^2x_2x_3$$
$$= (2,2,0,0) + 2(2,1,1,0) + 6d.$$
$$\therefore \quad (2,2,0,0) = b^2 - 2(2,1,1,0) - 6d.$$
$(2,1,1,0)$ の計算のために $(-a)(-c)$ を作る。
$$(-a)(-c) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$$
$$= x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + x_1^2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$
$$+ x_2^2x_1x_3 + x_2^2x_1x_4 + x_2^2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$
$$+ x_3^2x_1x_2 + x_3^2x_1x_4 + x_3^2x_2x_4 + x_1x_2x_3x_4$$
$$+ x_4^2x_1x_2 + x_4^2x_1x_3 + x_4^2x_2x_3 + x_1x_2x_3x_4$$
$$= (2,1,1,0) + 4d.$$
$$\therefore \quad (2,1,1,0) = ac - 4d.$$
$$\therefore \quad (2,2,0,0) = b^2 - 2(2,1,1,0) - 6d$$
$$= b^2 - 2(ac - 4d) - 6d$$
$$= b^2 - 2ac + 2d.$$
$$\therefore \quad (3,1,0,0) = a^2b - (2,1,1,0) - 2b^2$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2b - (ac - 4d) - 2b^2 \\
&= a^2b - 2b^2 - ac + 4d.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad (4,0,0,0) &= a^4 - 4(3,1,0,0) - 6(2,2,0,0) - 12(2,1,1,0) - 24d \\
&= a^4 - 4(a^2b - 2b^2 - ac + 4d) \\
&\qquad - 6(b^2 - 2ac + 2d) \\
&\qquad - 12(ac - 4d) \\
&\qquad - 24d \\
&= a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac - 4d.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad B &= u_1^2u_2^2 + u_1^2u_3^2 + u_2^2u_3^2 \\
&= 3(4,0,0,0) + 2(2,2,0,0) - 4(3,1,0,0) + 4(2,1,1,0) - 24(1,1,1,1) \\
&= 3(a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac - 4d) \\
&\qquad + 2(b^2 - 2ac + 2d) \\
&\qquad - 4(a^2b - 2b^2 - ac + 4d) \\
&\qquad + 4(ac - 4d) \\
&\qquad - 24d \\
&= 3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac - 64d.
\end{aligned}
$$
（解おわり）

問 7. $C = u_1u_2u_3 = -a^3 + 4ab - 8c$

を示せ。

解

$$
\begin{aligned}
C &= u_1u_2u_3 \\
&= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)u_3 \\
&= (x_1x_1 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 \\
&\quad + x_2x_1 - x_2x_2 + x_2x_3 - x_2x_4 \\
&\quad - x_3x_1 + x_3x_2 - x_3x_3 + x_3x_4 \\
&\quad - x_4x_1 + x_4x_2 - x_4x_3 + x_4x_4)u_3 \\
&= (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3)(x_1 + x_2 - x_3 + x_4) \\
&= x_1^3 - x_2^2x_1 - x_3^2x_1 + x_4^2x_1 \qquad - 2x_1^2x_4 + 2x_1x_2x_3 \\
&\quad - x_1^2x_2 + x_2^3 + x_3^2x_2 - x_4^2x_2 \qquad + 2x_1x_2x_4 - 2x_2^2x_3 \\
&\quad - x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^3 - x_4^2x_3 \qquad + 2x_1x_3x_4 - 2x_3^2x_2 \\
&\quad + x_1^2x_4 - x_2^2x_4 - x_3^2x_4 + x_4^3 \qquad - 2x_4^2x_1 + 2x_2x_3x_4 \\
&= (3,0,0,0) - (2,1,0,0) + 2(1,1,1,0).
\end{aligned}
$$

$(3,0,0,0)$ の計算のために $(-a)^3$を作る。

$$
\begin{aligned}
(-a)^3 &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 \\
&= (3,0,0,0) + 3(2,1,0,0) + 6(1,1,1,0).
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad (3,0,0,0) = (-a)^3 - 3(2,1,0,0) - 6(-c)
$$

$(2,1,0,0)$ の計算のために $(-a)b$ を作る。

$$
\begin{aligned}
(-a)b &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \\
&= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1^2x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2^2x_3+x_2^2x_4+x_2x_3x_4\\
&+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_1x_3x_4+x_2x_3^2+x_2x_3x_4+x_3^2x_4\\
&+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_1x_4^2+x_2x_3x_4+x_2x_4^2+x_3x_4^2\\
&=(2,1,0,0)+3(1,1,1,0).
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad (2,1,0,0)=(-a)b+3c.$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad (3,0,0,0)&=(-a)^3-3(2,1,0,0)-6(-c)\\
&=(-a)^3-3(-ab+3c)-6(-c)\\
&=-3a^3+3ab-3c.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad C&=(3,0,0,0)-(2,1,0,0)+2(1,1,1,0).\\
&=-3a^3+3ab-3c-(-ab+3c)+2(-c)\\
&=-a^3+4ab-8c.
\end{aligned}
$$
（解おわり）

問 8. 次の 4 次方程式を解け。

$(1-i)x^4+(-12-2i)x^3+(13+37i)x^2+(48-36i)x+(-38-34i)=0$

解　両辺を $(1-i)$ で割って、最高次の係数を 1 にする。

$x^4-(5+7i)x^3+(-12+25i)x^2-(-42-6i)x+(-2-36i)=0$

$a=5+7i,\quad b=-12+25i,\quad c=-42-6i,\quad d=-2-36i.$

A,B,C,C^2を計算する。

$A=3a^2-8b=24+10i,$

$B=3a^4-16a^2b+16b^2+16ac-64d.=164+480i,$

$C=-a^3+4ab-8c=-6-30i,$

$C^2=-864+360i.$

次の 3 次方程式を解く。

$x^3-(24+10i)x^2+(164+480i)x-(-864+360i)=0.$

解いた 3 根を u_1^2,u_2^2,u_3^2とおいて、

$u_1^2=24-10i,u_2^2=18i,u_3^2=2i.$

$\therefore\quad u_1=5-i,u_2=3+3i,u_3=1+i.$

x_1から x_8の式に代入して、

$x_1=3.5+2.5i,x_5=3+2i,x_6=2+i,x_2=1.5+0.5i,$

$x_7=1+3i,x_3=0.5+2.5i,x_4=-0.5+1.5i,x_8=-1+i.$

これらを原方程式に代入する。

$f(x_1)=15.75+20.25i,f(x_5)=0+0i,f(x_6)=0+0i,f(x_2)=9.75-9.75i,$
$f(x_7)=0+0i,f(x_3)=-11.25+2.25i,f(x_4)=-14.25-12.75i,f(x_8)=0+0i.$

従って、次の 4 個が根。

$x_5=3+2i,x_6=2+i,x_7=1+3i,x_8=-1+i.$　（解おわり）