二次曲線の極座標表示

能美武功　（平成１６年１１月１５日）

§1　楕円の式の作り方とその極座標表示

問　二つの焦点からの距離の和が一定である点の軌跡を楕円という。

焦点を $(-c, 0)$, $(c, 0)$ とし、これらからの距離の和を $2a$ $(a > c)$ と

した時、この楕円の式を求めよ。

解

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a$

両辺を二乗。

$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

$4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

両辺を二乗。

$a^4-2ca^2x+c^2x^2=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{(a^2-c^2)}=1$

$a^2-c^2=b^2$ とおくと、

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　　　解おわり

問

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のグラフを描け。

解

$y$ 軸を切るところは、$x=0$ を代入して、$y=\pm b$

$x$ 軸を切るところは、$y=0$ を代入して、$x=\pm a$

以下省略。　　　解おわり。

問

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b)$ の焦点の座標を求めよ。

解

$a^2-b^2=c^2$

$\therefore$　焦点の座標は $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$　　解おわり。

問

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b)$

の焦点の座標は前問の結果から $(\pm c, 0)$（ここで、$c=\sqrt{a^2-b^2}$）であるが、

この楕円を左に $c$ 平行移動した楕円

$\dfrac{(x+c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

の、極座標表示を求めよ。

解

$b^2(x+c)^2+a^2x^2=a^2b^2$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を代入して、

$b^2(r\cos\theta+c)^2+a^2r^2\sin^2\theta=a^2b^2$

$(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)r^2+2(b^2c\cos\theta)r+b^2(c^2-a^2)=0$

$(a^2-a^2\cos^2\theta+b^2\cos^2\theta)r^2+2(b^2c\cos\theta)r-b^4=0$

$(a^2-c^2\cos^2\theta)r^2+2(b^2c\cos\theta)r-b^4=0$

$D/4=(b^2c\cos\theta)^2+b^4(a^2-c^2\cos^2\theta)=a^2b^4$

$\therefore \quad r = \dfrac{-b^2 c\cos\theta \pm ab^2}{a^2 - c^2\cos^2\theta}$

$r$ はマイナスにはなりえないので、

$r = \dfrac{-b^2 c\cos\theta + ab^2}{a^2 - c^2\cos^2\theta} = \dfrac{b^2}{a + c\cos\theta}$　　　解おわり

問

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ \ (a > b)$

の焦点の座標は前前問の結果から $(\pm c, 0)$（ここで、$c = \sqrt{a^2 - b^2}$）であるが、

この楕円を右に $c$ 平行移動した楕円

$\dfrac{(x-c)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

の、極座標表示を求めよ。

解

前問と同様の計算により、

$r = \dfrac{b^2}{a - c\cos\theta}$　　　解おわり

注意１　上の答の $r$ の表示の分子、分母を $a$ で割って、

$r = \dfrac{b^2/a}{1 \pm c/a\cos\theta}$

$b^2/a = l,\ c/a = e$

とおけば、

$r = \dfrac{l}{1 \pm e\cos\theta}$

と書ける。

注意２

$r = \dfrac{l}{1 + e\cos\theta}$

のときは、楕円の右側の焦点が原点 $(0,0)$ にあり、

$$r=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

のときは、楕円の左側の焦点が原点 $(0,0)$ にある。

注意 3

極座標表示におけるこの場合（楕円の場合）では、$-1<e<1$ となる。

（$-1<c/a<1$ であるから。）

## §2　双曲線の式の作り方とその極座標表示

問　二つの焦点からの距離の差が一定である点の軌跡を双曲線という。

焦点を $(-c,0)$, $(c,0)$ とし、これらからの距離の和を $2a$ $(a<c)$ と

した時、この双曲線の式を求めよ。

解

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a$$

　両辺を二乗。

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$-a^2+cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

　両辺を二乗。

$$a^4-2ca^2x+c^2x^2=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(c^2-a^2)}=1$$

$c^2-a^2=b^2$ とおくと、

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$　　解おわり

問

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \ \ (a>b)$

の焦点の座標は前問の結果から $(\pm c,0)$（ここで、$c=\sqrt{a^2+b^2}$）であるが、

この双曲線を左に $c$ 平行移動した双曲線

$\dfrac{(x+c)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

の、極座標表示を求めよ。

解

$b^2(x+c)^2-a^2x^2=a^2b^2$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を代入して、

$b^2(r\cos\theta+c)^2-a^2r^2\sin^2\theta=a^2b^2$

$(-a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)r^2+2(b^2c\cos\theta)r+b^2(c^2-a^2)=0$

$(-a^2+a^2\cos^2\theta+b^2\cos^2\theta)r^2+2(b^2c\cos\theta)r+b^4=0$

$(-a^2+c^2\cos^2\theta)r^2+2(b^2c\cos\theta)r+b^4=0$

$D/4=(b^2c\cos\theta)^2-b^4(-a^2+c^2\cos^2\theta)=a^2b^4$

$\therefore \quad r=\dfrac{-b^2}{a+c\cos\theta}$ または、$r=\dfrac{-b^2}{-a+c\cos^2\theta}$ 　　　解おわり

問　上の二つの極座標表示は、どちらが右の枝でどちらが左の枝か。

解　$\theta=\pi$ を代入して、

$r=\dfrac{-b^2}{a+c\cos\theta}$ のとき、

$r=\dfrac{-(c-a)(c+a)}{a-c}=a+c$

即ち、左の枝。

$r=\dfrac{-b^2}{-a+c\cos\theta}$ のとき、

$r=\dfrac{-(c-a)(c+a)}{-a-c}=c-a$

即ち右の枝。　　　　　解おわり

問　上の二つの極座標表示において、分子分母を $a$ で割り、

$b^2/a=l,\ c/a=e$ とおくと、左の枝は、

$r=\dfrac{l}{-1-e\cos\theta}$

右の枝は、

$r=\dfrac{l}{1-e\cos\theta}$

と表されるが、おのおの、グラフの存在する角度の範囲を求めよ。

解　左の枝は、$r\geqq 0$ を解いて、

$$
\begin{aligned}
&-1-c/a\cos\theta\geqq 0\\
&\quad\cos\theta\leqq -a/c\\
&\quad-\pi\leqq\theta\leqq-\cos^{-1}(-a/c)\ \ or\ \ \cos^{-1}(-a/c)\leqq\theta\leqq\pi
\end{aligned}
$$

右の枝は、$r\geqq 0$ を解いて、

$$
\begin{aligned}
&1-c/a\cos\theta\geqq 0\\
&\quad\cos\theta\leqq a/c\\
&\quad-\pi\leqq\theta\leqq-\cos^{-1}(a/c)\ \ or\ \ \cos^{-1}(a/c)\leqq\theta\leqq\pi
\end{aligned}
$$

解おわり

問

双曲線　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b)$

の焦点の座標は $(\pm c,0)$（ここで、$c=\sqrt{a^2+b^2}$）であった。

この双曲線を右に $c$ 平行移動した双曲線

$\dfrac{(x-c)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

の、極座標表示を求めよ。

解

さっきと同様の計算を行い、

$r = \dfrac{l}{1 + e\cos\theta} \quad or \quad \dfrac{l}{-1 + e\cos\theta}$

ただし、$b^2/a = l,\ c/a = e$　　　　　解おわり

問　上の二つの極座標表示は、どちらが右の枝でどちらが左の枝か。

解

$r = \dfrac{l}{1 + e\cos\theta}$ は左の枝。

$r = \dfrac{l}{-1 + e\cos\theta}$ は右の枝。　　　　解おわり

問　左の枝、右の枝のグラフの存在する角度の範囲を求めよ。

解

左の枝　　$-\cos^{-1}(-c/a) \leqq \cos^{-1}(-c/a)$

右の枝　　$-\cos^{-1}(c/a) \leqq \cos^{-1}(c/a)$　　　　　解おわり

注意１　上の極座標表示において、$e > 1$ に注意。

$( \quad \because \quad c/a > 1)$

§３　放物線の式の作り方とその極座標表示

問　一つの焦点からと、準線からの距離が等しい点の軌跡を放物線という。

焦点を $(0, 0)$ とし、準線を $x = c$ としたときの放物線の式を求めよ。

解

$\sqrt{x^2 + y^2} = c - x$

$x^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2$

$y^2 + 2cx - c^2 = 0$　　　　　解おわり

問　上の放物線を極座標表示せよ。

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入して、

$r = \dfrac{-c\cos\theta \pm c}{\sin^2\theta}$

$r > 0$ の方をとって、

$r = \dfrac{c}{1+\cos\theta}$ 　　解おわり

問　一つの焦点からと、準線からの距離が等しい点の軌跡を放物線という。

焦点を $(0,0)$ とし、準線を $x = -c$ としたときの放物線の式を求めよ。

解

$\sqrt{x^2+y^2} = c + x$

$x^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$

$y^2 - 2cx - c^2 = 0$ 　　　　解おわり

問　上の放物線を極座標表示せよ。

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入して、

$r = \dfrac{c\cos\theta \pm c}{\sin^2\theta}$

$r > 0$ の方をとって、

$r = \dfrac{c}{1-\cos\theta}$ 　　解おわり

§４　二次曲線の極座標表示のまとめ

以上から、焦点を原点（$0,0$）に持ってくれば、二次曲線は

極座標により、次のように表せることが分る。

$r = \dfrac{l}{1+e\cos\theta}$

（但し、双曲線の場合は、原点の周囲を廻りこむような軌跡を

描く枝を選ぶ。原点を廻りこまない軌跡は上の分母の１が

－１となる。）

$e$ の大きさで分類すると、下記のようになる。

$e < -1$　　右の焦点（これが原点）を廻る双曲線。

$e = -1$　　焦点が右（これが原点）で、準線が左にある放物線。

$-1 < e < 0$　　左側の焦点（これが原点）をまわる楕円。

$e = 0$　　中心が原点である円。

$0 < e < 1$　　右側の焦点（これが原点）をまわる楕円。

$e = 1$　　焦点が左（これが原点）で、準線が右にある放物線。

$1 < e$　　左の焦点（これが原点）を廻る双曲線。

まとめ、終り。